

Geometrie heute und morgen

Fortbildungsveranstaltung
des PI Kärnten
25. April 2006



Michael Wischounig, Wien

Zur Person

- seit Herbst 1999: Lehrer am Bernoulligymnasium, Wien 22
 - Darstellende Geometrie
 - Mathematik
 - Informatik
- Lehrbeauftragter an der TU Wien (Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie)
- Referent in der Lehrerfortbildung (PI Wien, PI Oberösterreich, PI Niederösterreich, ...)
- Leiter der ARGE DG/GZ-Wien
- Mitarbeit in den Arbeitsgruppen ADI, FfG, NAWI-Netzwerk Wien
- Mitarbeit am neuen DG-Lehrbuch für AHS: „**RAUMGEOMETRIE** – Konstruieren und Visualisieren“ (öbvht, 2006)
- <http://www.bernoulligymnasium.at/wischounig>



Motivation

- Wandel des Gegenstandes DG:
„The World is Changed“ 🍌 ;-)
- neuer Lehrplan für DG:
 - gültig aufsteigend ab 2006/2007
 - neue Inhalte
 - neue Werkzeuge



Überblick über das Seminar

- Änderungen und deren Umsetzung herausarbeiten
- Überblick, was alles möglich ist
- Kapitel „Flächen und Kurven“
- Lösen ausgesuchter Beispiele
- „**RAUMGEOMETRIE** – Konstruieren und Visualisieren“ (Pillwein, Asperl, Wischounig, Müllner; öbvht 2006): Vorstellung des Buches, Hinweise zur Arbeit im Unterricht



Der neue DG-Lehrplan

Der allgemeine Teil gilt bereits seit dem Schuljahr 2004/2005, der Fachlehrplan wird ab dem Schuljahr 2006/2007 gelten.

Downloadmöglichkeit von der Seite
<http://www.gemeinsamlernen.at>



Bedeutung der DG

- Die Bedeutung der DG in der AHS beruht vor allem auf folgenden Aspekten:
 - die Grundsätze der Geometrie sind die Basis für zeitlose, unveränderliche und in vielen Gebieten anwendbare Denkstrukturen und haben daher den Charakter einer **Schlüsselqualifikation**
 - die Geometrie als Mittel zur eindeutigen Beschreibung von Raumsituationen ist das adäquate **Instrument zur Analyse und Lösung räumlicher Probleme**
 - das händische Konstruieren einerseits und die Verwendung zeitgemäßer 3D-CAD-Software andererseits fördern das **Erkennen bzw. die Kenntnis der geometrischen Zusammenhänge**
 - das Arbeiten mit virtuellen Objekten erfordert ein hohes Maß an **räumlichem Vorstellungsvermögen**



Ziele des DG-Unterrichts nach dem *alten* Lehrplan

Fachspezifische Ziele:

Die Schüler sollen befähigt werden zum

- Erfassen, Analysieren und sprachlich angemessenen Beschreiben geometrischer Formen und Strukturen, insbesondere der für technische Anwendungen wichtigen Kurven und Flächen;
- Lösen räumlicher Probleme unter Verwendung einer Konstruktionszeichnung;
- Erfassen der benützten geometrischen Begriffsbildungen;
- Anfertigen von Handskizzen räumlicher Objekte;
- Erkennen, welche Abmessungen ein Objekt bestimmen;
- Herstellen von Entwürfen;
- zeichnerisches Darstellen räumlicher Objekte durch geeignete Abbildungsverfahren;
- Lesen zeichnerischer Darstellungen räumlicher Gebilde;
- Beherrschen von Zeichentechniken.



Ziele des DG-Unterrichts nach dem *alten* Lehrplan

Fachübergreifende Ziele:

Die Schüler sollen befähigt werden zum

- Denken in räumlicher Anordnung (Raumvorstellung);
- Verwenden der Konstruktionszeichnung als ein in technischen Belangen der Sprache überlegenes Kommunikationsmittel;
- gewissenhaften, genauen und sauberen Arbeiten, selbstkritischen logischen Denken und präzisen sprachlichen Formulieren;
- Erkennen von Querverbindungen zur Mathematik, zur Informatik, zu den Naturwissenschaften, zur Technik und zur Bildenden Kunst;
- Weiterentwickeln ihrer graphischen Fähigkeiten.



Vergleich der Ziele

- Der Vergleich zeigt, dass sich die Ziele unwesentlich geändert haben.
- Ein neues Ziel, das sich sehr stark auf den Unterricht und die Inhalte auswirkt:
Befähigung zum sinnvollen Einsatz geeigneter 3D-CAD-Software.



Einige neue Inhalte im Lehrplan

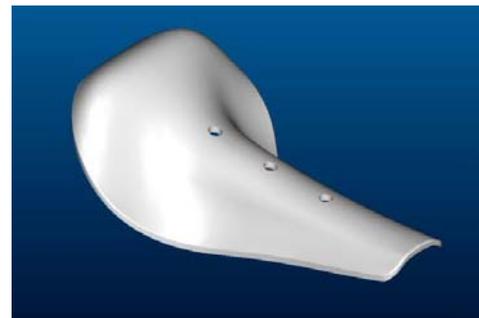
- Verstehen von Koordinatensystemen
- Arbeiten mit einer 3D-CAD-Software lernen
- grundlegende Eigenschaften von Kurven
- Arbeiten mit Flächen- und Volumsmodellen (Unterscheidung)
- fortgeschrittenes Modellieren und Konstruieren mit 3D-CAD-Software

Zwei verschiedene Jahresplanungen

- Grundsätzlicher Unterschied zwischen den beiden Varianten: Gewichtung des Einsatzes der 3D-CAD-Software.
 - Vorschlag 1: ist dem klassisch-konstruktiven Ansatz näher
 - Vorschlag 2: breiter Raum für die Möglichkeiten moderner CAD-Software
- Autoren: Mag. Michaela Kraker, Dr. Andreas Asperl, Dr. Günter Maresch, Mag. Wilhelm Nowak, Prof. Otto Röschel

Der Themenbereich „Kurven und Flächen“

Motivation: Mit den Standardkörpern allein kommt man beim Entwerfen realer Objekte und im Design nicht mehr aus.



www.cs.uni-magdeburg.de/~cgraf/AWF/cadcam/



Neuer DG-Lehrplan

Die Schülerinnen und Schüler sollen grundlegende Eigenschaften von Kurven erfassen

- Arbeiten mit Parameterdarstellungen von Kurven (zB Kreis, Ellipse, Schraublinie)
- Erarbeiten des Tangentenbegriffes
- Erzeugen von Freiformkurven (zB Bézierkurven) und Kennenlernen von deren Eigenschaften



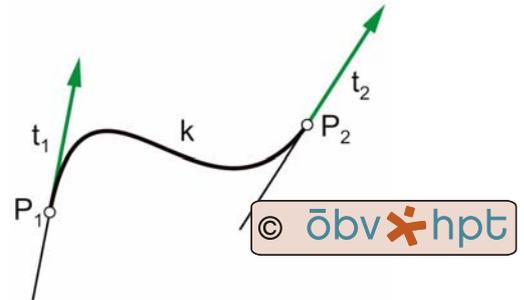
Neuer DG-Lehrplan

Die Schülerinnen und Schüler sollen mit 3D-CAD-Software fortgeschritten modellieren und konstruieren können

- Generieren von Flächen- und Volumsmodellen durch Rotation und Extrusion (zB Drehflächen, allgemeine Pyramiden-, Prismen-, Zylinder- und Kegelflächen sowie die zugehörigen Solids)
- Analysieren und Erzeugen von Schieb- und Regelflächen anhand ausgewählter Beispiele
- Kennenlernen der Grundbegriffe und Eigenschaften von Freiformflächen
- Lösen raumgeometrischer Problemstellungen anhand von Beispielen aus Technik, Architektur, Design, Kunst usw.

Häufiges Problem

- Gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2 einer Ebene samt Tangenten t_1 und t_2 .
- Finde eine passende Kurve k , welche durch die beiden Punkte P_1 und P_2 verläuft und dort die gegebenen Tangenten berührt.

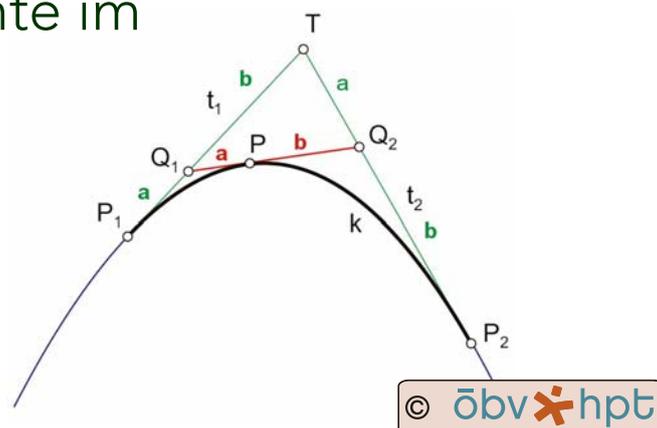


Anforderungen an die Lösung

- Die Kurve soll leicht berechenbar und durch einen einfachen Algorithmus programmierbar sein.
- Es sollen nur wenige Angabeelemente notwendig sein, um die Kurve **eindeutig** festzulegen.

Die Parabel ...

- ... ist jene Kurve, die unsere Anforderungen erfüllt.
- Ist eine weitere Tangente im Kurvenpunkt X eingezeichnet, so ist das Verhältnis $a:b$ auf den markierten Strecken gleich.



Der Algorithmus von de Casteljau

- Konstruktionsvorschrift benannt nach Paul de Casteljau (Citroën).



Verallgemeinerung des Algorithmus von de Casteljau



Bézierkurven

- Sie sind das Ergebnis des Algorithmus von de Casteljau bzw. seiner Verallgemeinerung.
- Grad einer Bézierkurve =
= Anzahl Kontrollpunkte – 1
- Die Kurven sind nach Pierre Bézier (Renault) benannt.



Eigenschaften einer Bézierkurve (Grad n):

- Sie verläuft durch B_0 und B_n .
- In den Endpunkten ist sie tangential zu B_0B_1 und $B_{n-1}B_n$.
- Sie liegt innerhalb der konvexen Hülle des Kontrollpolygons.
- Eine Gerade schneidet sie höchstens so oft, wie sie ihr Kontrollpolygon schneidet.
- Eine affine Transformation der Bézierkurve kann man auch auf das Kontrollpolygon anwenden.



Nachteile der Bézierkurven

- Bézierkurven mit vielen Kontrollpunkten sind schwer kontrollierbar (**globale Kontrolle**) und nähern das Kontrollpolygon nur noch schlecht an.
- Diese Probleme kann man durch **B-Splinekurven** vermeiden.

Splines

- Der Begriff „Spline“ stammt aus dem Schiffsbau und beschreibt flexible Metallstreifen, die durch Anbringen von Gewichten deformiert werden.

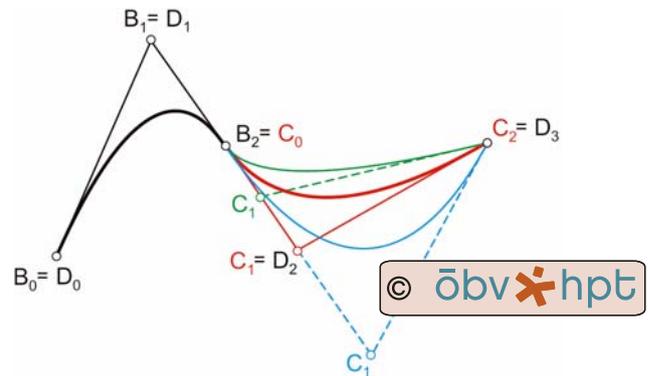


B-Splinekurven

- Mehrere Bézierkurven (niedrigen Grades; meist Grad 2 oder 3) werden zusammengesetzt.
- Der Übergang soll möglichst glatt realisiert werden. Dazu sind einige Überlegungen notwendig ...

Übergang zweier Parabeln

- Optisch glatter Übergang durch gemeinsame Tangente.
- Durch Tangentenvektoren gleicher Länge ändert sich auch die Durchlaufgeschwindigkeit kontinuierlich.



B-Splinekurven vom Grad 2

- B-Splinekurven vom Grad 2 berühren die Seiten des Kontrollpolygons (Ausnahme: erste und letzte) im Mittelpunkt und bestehen aus Parabelsegmenten.
- Die Gestalt wird durch die so genannten deBoor-Punkte bestimmt.



Anzahl der Kontrollpunkte

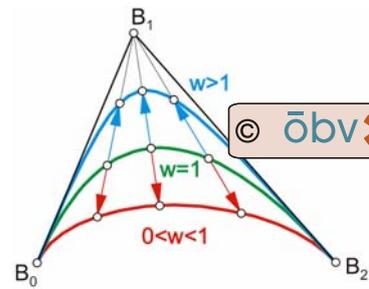
- Für eine B-Splinekurve vom Grad n sind mindestens $n+1$ Kontrollpunkte notwendig.
- Liegen genau $n+1$ Kontrollpunkte vor, so ist die B-Splinekurve eine Bézierkurve vom Grad n .



Approximierende und interpolierende Kurven

- Bézierkurven und B-Splinekurve sind approximierende Kurven.
- In vielen CAD-Paketen können auch interpolierende Kurven erzeugt werden.

NURBS

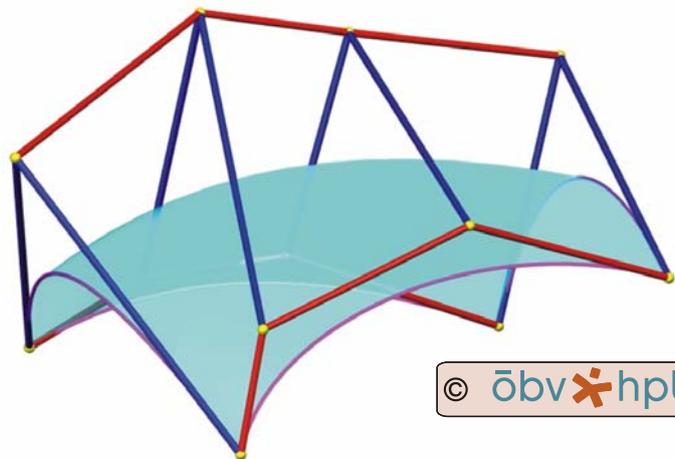


© öbv hpt

- Durch das Einführen von so genannten Gewichten entstehen NURBS.
- Bézierkurven und B-Splinekurven sind Sonderfälle von NURBS.
- Wird das Gewicht eines Kontrollpunktes erhöht, so wird die Kurve näher zum Kontrollpunkt hingezogen.

Bézierflächen

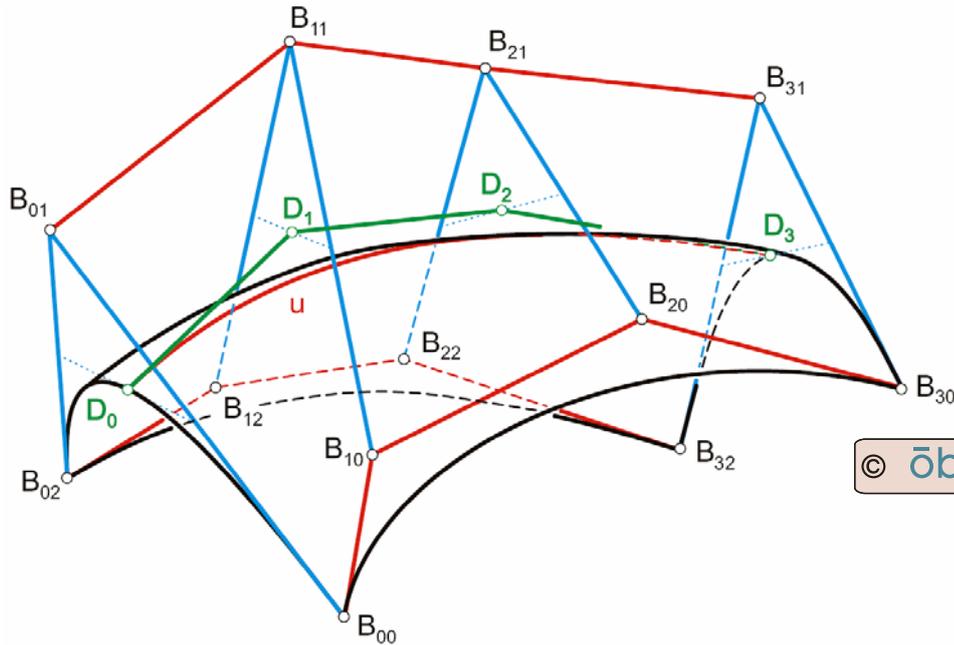
- Geben wir im dreidimensionalen Raum zB vier Kontrollpolygone (blau) mit jeweils drei Kontrollpunkten vor, so sind dadurch die drei Kontrollpolygone (rot) mit jeweils vier Kontrollpunkten mitbestimmt.



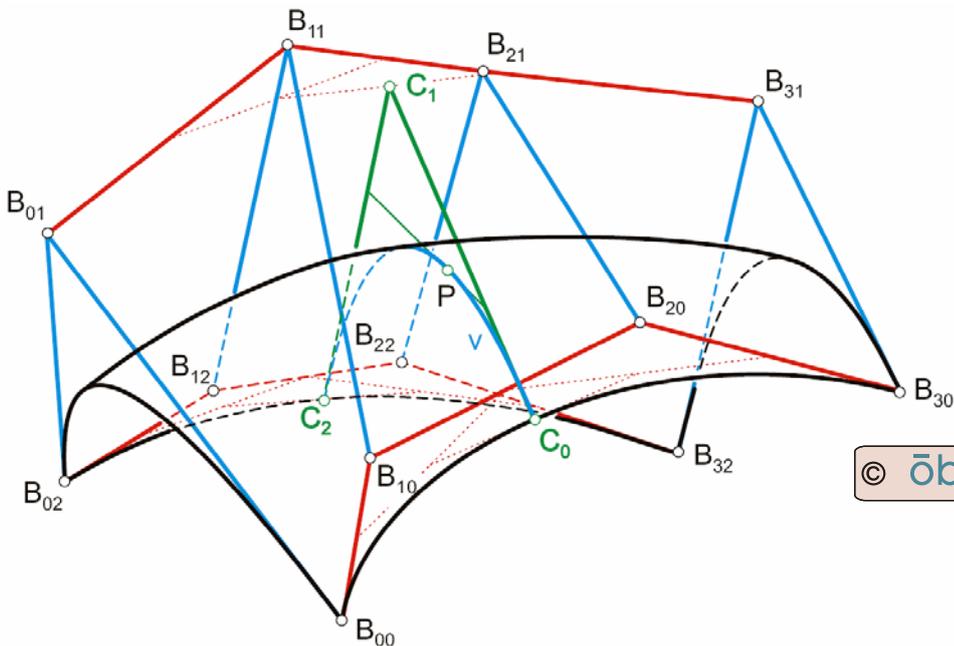
© öbv hpt

Wir erhalten ein Kontrollnetz von 4 x 3 Kontrollpunkten, das eine Bézierfläche vom Grad (3,2) festlegt.

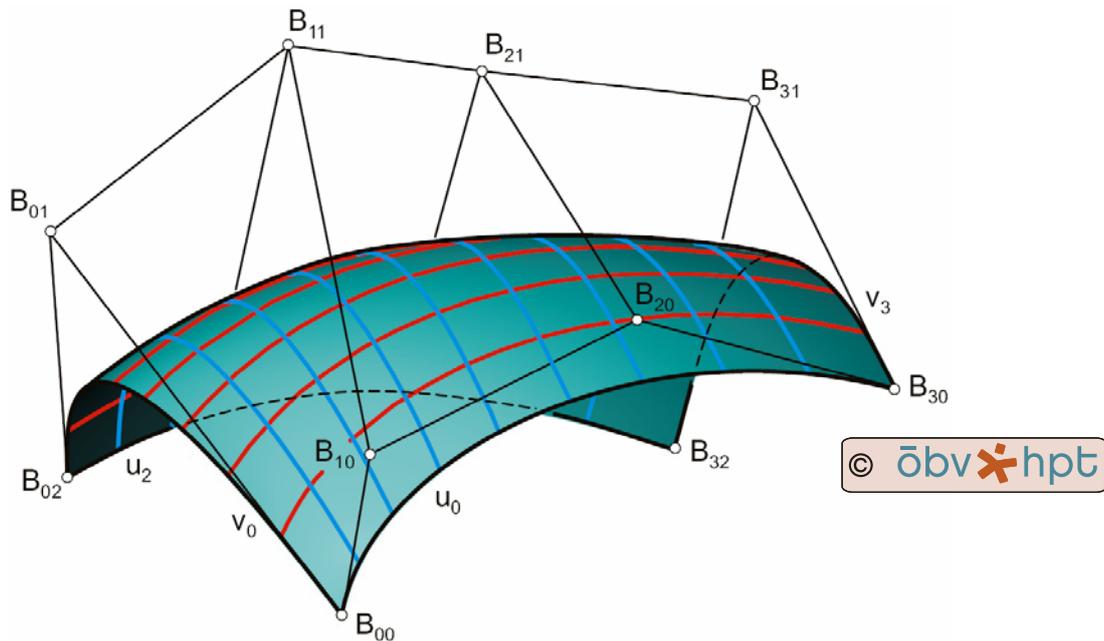
Kurvenscharen auf Bézierflächen



Kurvenscharen auf Bézierflächen



Kurvenscharen auf Bézierflächen



Michael Wischounig,
Bernoulligymnasium Wien

Geometrie heute und morgen

35

Mathematische Beschreibung von Kurven

- Es gibt mehrere Möglichkeiten, Kurven mathematisch zu beschreiben:
 - Gleichung: zB $x^2 + y^2 = 1$
 - Funktionen: zB $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
 - Parameterdarstellungen: zB $x = \cos u, y = \sin u$
- Nachteile von Gleichungen:
 - kann kompliziert und umständlich sein
 - Beschränkung auf ebene Kurven
- Nachteile der Funktionsdarstellung:
 - „ganze Kurven“ unter Umständen nicht erfassbar
 - Schwierigkeiten im Raum

Michael Wischounig,
Bernoulligymnasium Wien

Geometrie heute und morgen

36

Parameterdarstellungen von Kurven

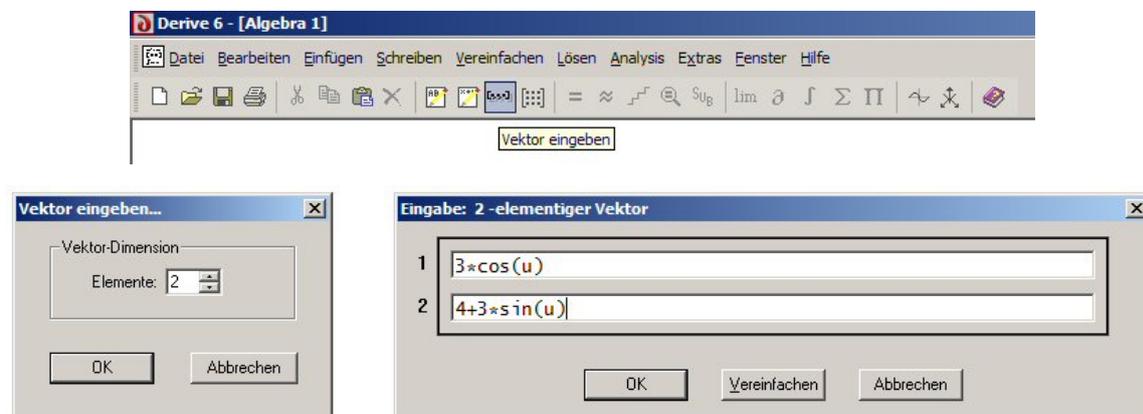
- Ermittle die Parameterdarstellungen und kontrolliere mit einem CAS-Programm:
 - Kreis $[M(0|4), r = 3]$
 - Halbkreis $[M(2|1), r = 4, y \geq 1]$

Parameterdarstellungen von Kurven

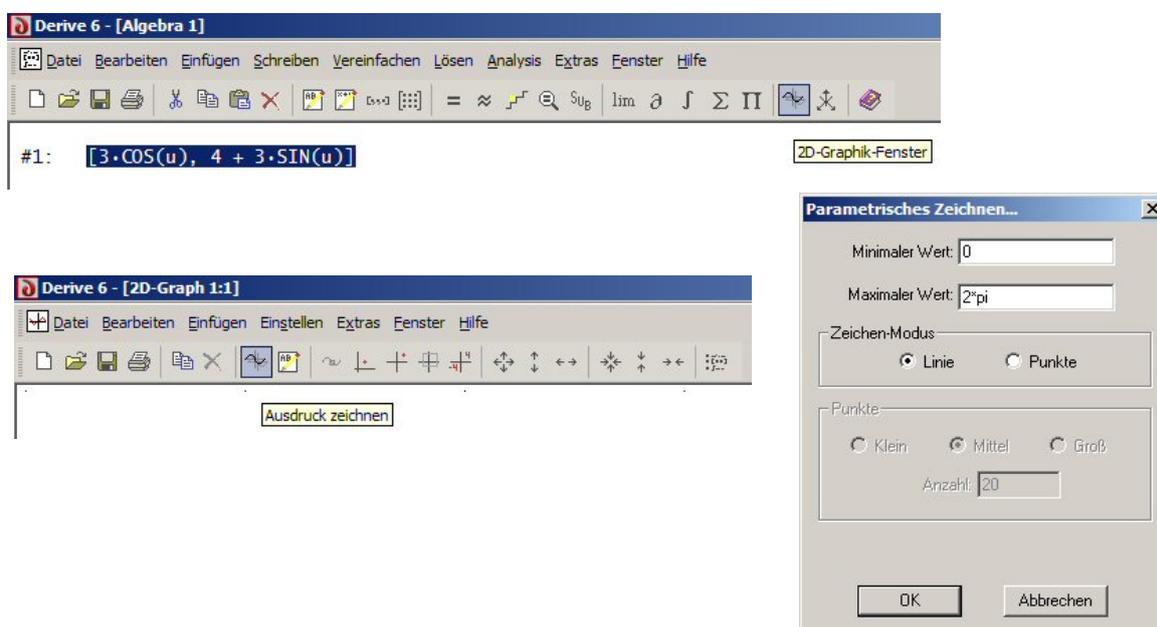
- Lösungen:
 - $x = 3 \cdot \cos u, y = 4 + 3 \cdot \sin u$
 - $x = 2 + 4 \cdot \cos u, y = 1 + 4 \cdot \sin u, u \in [0; \pi]$

Parameterdarstellungen von Kurven

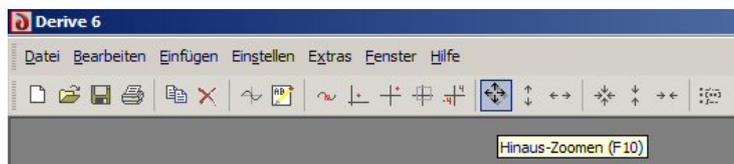
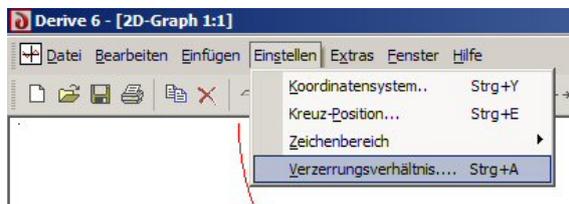
■ Kontrolle mit Derive:



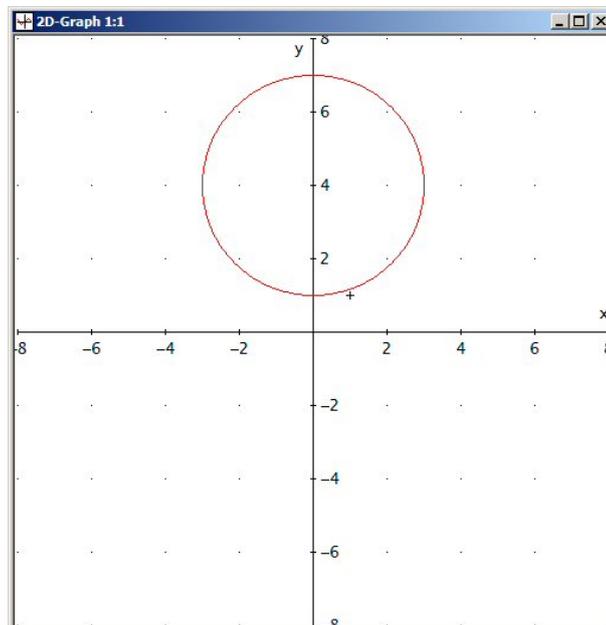
Parameterdarstellungen von Kurven



Parameterdarstellungen von Kurven



Parameterdarstellungen von Kurven

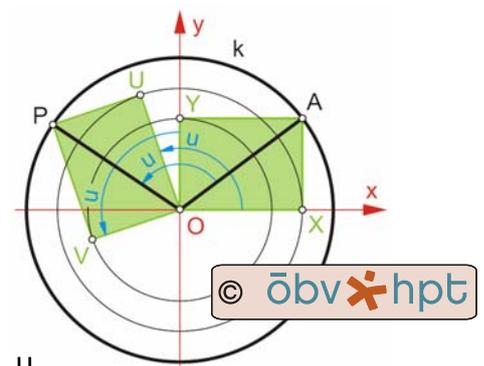


Parameterdarstellungen von Kurven

- Zeichne die Raumkurve mit einem CAS-Programm! Gib eine Parameterdarstellung der Tangente im Punkt P an und berechne den Neigungswinkel der Tangente zur xy-Ebene!
 - $x = \cos u, y = \cos u \cdot \sin u, z = \sin^2 u, u \in [0; 2\pi];$
P(0|0|1)

Parameterdarstellungen von Flächen

- Wir betrachten zB eine Drehfläche:
- Koordinatentransformation bei Drehung um den Ursprung:
 $x = x_A \cdot \cos u - y_A \cdot \sin u,$
 $y = x_A \cdot \sin u + y_A \cdot \cos u$
- Raumkurve e mit der Parameterdarstellung
 $x = x(v), y = y(v), z = z(v)$
- Parameterdarstellung der Drehfläche bei Rotation von e um die z-Achse:
 $x = x(v) \cdot \cos u - y(v) \cdot \sin u,$
 $y = x(v) \cdot \sin u + y(v) \cdot \cos u,$
 $z = z(v)$

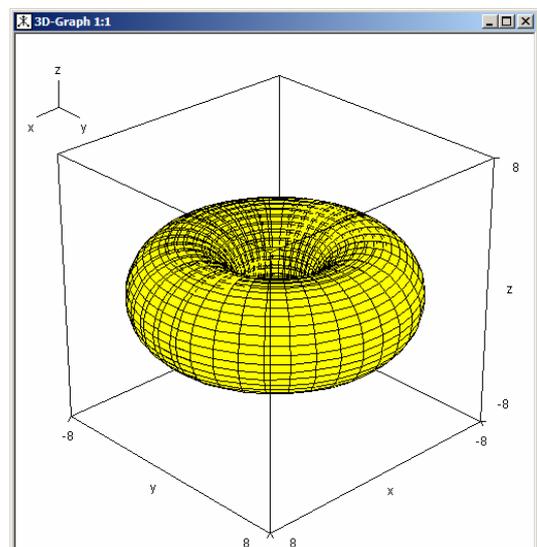


Parameterdarstellungen von Flächen

- Ermittle die Parameterdarstellung und kontrolliere mit einem CAS-Programm (zB Derive):
 - Der in der yz -Ebene liegende Kreis $k[M(0|5|0), r = 3]$ rotiert um die z -Achse.

Parameterdarstellungen von Flächen

- Lösung:
$$x = -(5 + 3 \cdot \cos v) \cdot \sin u$$
$$y = (5 + 3 \cdot \cos v) \cdot \cos u$$
$$z = 3 \cdot \sin v$$





Arbeitsformen im „neuen“ DG-Unterricht

- schülerzentrierter Unterricht neben dem Frontalunterricht
- Team- und Projektarbeiten (vor allem bei der Arbeit mit CAD-Programmen)
- differenzierte Arbeitsaufträge
- konsequenter Einsatz von vorbereiteten Arbeitsblättern



Konsequenter Einsatz von Arbeitsblättern

Vorteile von teilweise vorgezeichneten Arbeitsblättern:

- effizientere Nutzung der Unterrichtszeit
- Konzentration auf das Wesentliche
- größere Flexibilität im Unterricht
- Erstellung „professioneller“ Blätter zB mit CorelDraw (derzeit aktuell: Version X3; Kosten für eine Edu-Lizenz: 100 Euro; Bestellmöglichkeit zB über <http://www.schulshop.at>)

Erstellen von Arbeitsblättern

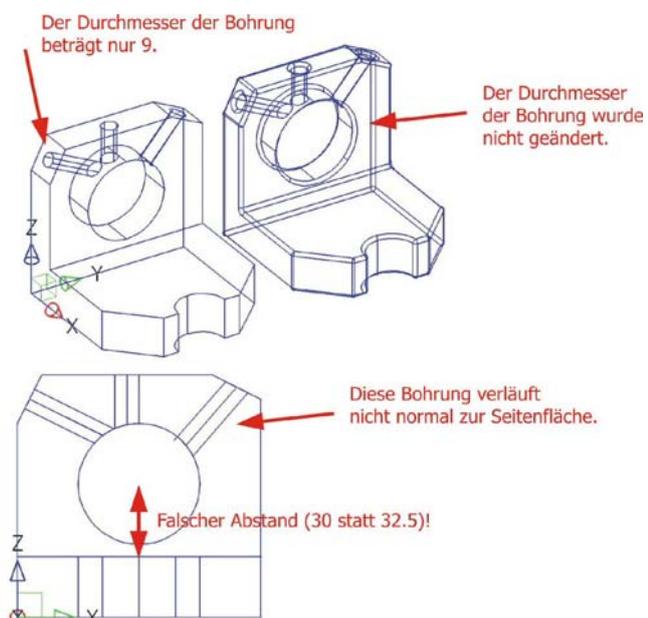
Eine mögliche Vorgangsweise beim Erstellen von Arbeitsblättern mit CorelDraw:

- Export aus dem CAD-Programm als pdf oder ps
- Import in CorelDraw
- weitere Bearbeitung im Grafik-Programm
- eventuell Export für die Weiterverwendung in einem Word-Dokument;
besser: Erstellen des gesamten Arbeitsblatts in CorelDraw (Bilder und Text hinzufügen)
Vorteil: ausgezeichnete Qualität, direkter pdf-Export, geringe Dateigröße

Leistungsfeststellung (Schularbeiten)

Verschiedene Möglichkeiten der Korrektur von CAD-Beispielen:

1 Kennzeichnen der Fehler auf Ausdrucken (oder in Screenshots)





. N . E . W . S .

- Versuch eines Überblicks, welche neuen Dinge es erst seit relativ kurzer Zeit gibt:
 - 3D-PDF (ab Version 7)
 - dynamische 3D-Software (Cabri 3D)
 - Software zum Erstellen von Lernvideos (Camtasia)



VRML vs. U3D

- VRML:
 - + Exportmöglichkeit (auch) aus CAD-3D und GAM
 - seit vielen Jahren nicht mehr weiterentwickelt
 - eigenes Plug-In für Browser notwendig
- U3D:
 - + u3d kann in pdf eingebunden werden → Acrobat Reader 7.0 (oder höher) reicht aus; kein eigenes Plug-In notwendig
 - + sehr kleine Dateien (auch wenn zB Animationen eingebunden sind)
 - + viele Optionen, die einfach geändert werden können (zB Transparenz), ohne in den Quellcode eingreifen zu müssen
 - keine Exportmöglichkeit aus CAD-3D und GAM
 - Entwicklung „im Laufen“



Dynamische Geometriesoftware

- 2D-Bereich:
 - Euklid DynaGeo (<http://www.dynageo.de>)
 - Cabri (<http://www.cabri.com>)
 - Zirkel und Lineal (http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/doc_de/index.html)
- 3D-Bereich:
 - Cabri 3D (<http://www.cabri.com>)



Lernvideos mit Camtasia

- Bildschirm „abfotografieren“ kennt jeder
- Camtasia ist eine Software, mit welcher der Bildschirm „abgefilmt“ werden kann

RAUMGEOMETRIE - Konstruieren und Visualisieren

- Set besteht aus zwei Büchern:
 - Theoriebuch
 - Arbeitsbuch mit Angabe- und Arbeitsblättern
- zusätzlich ist ein Lösungsbuch erhältlich
- ergänzendes Online-Material auf der Verlagshomepage (<http://www.oebvhpt.at/schulbuchplus>)
- (derzeit) das einzige Buch, das nach dem neuen Lehrplan für DG approbiert ist
- Ziel: verfassen eines **Geometriebuchs** und keines MicroStation-Buchs



Michael Wischounig,
Bernoulligymsium Wien

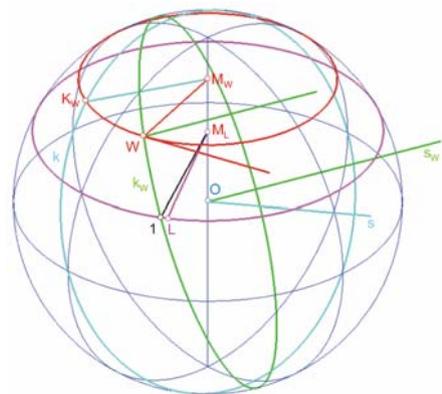
Geometrie heute und morgen

57

Beispiel 1 der Online-Materialien

Sonnenaufgang:

Herr Gerhard P. aus Wien ist am 20. Mai in Ägypten auf Urlaub und erlebt einen unvergesslichen Sonnenaufgang im weltberühmten Tempel von Luxor. Er fragt sich, ob die Sonne an diesem Tag in Wien früher oder später aufgeht als in Luxor. Beantworte die Frage und gib auch die Zeitdifferenz an!



Weitere Fragestellungen:

- Wo genau geht in Wien die Sonne an diesem Tag auf?
- Wann geht in Wien und in Luxor die Sonne gleichzeitig auf?

Michael Wischounig,
Bernoulligymsium Wien

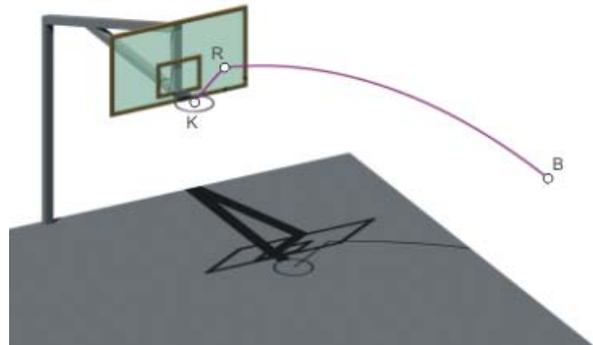
Geometrie heute und morgen

58

Beispiel 2 der Online-Materialien

Basketballwurf:

Ein Basketballspieler wirft den Ball aus der Position B so ab, dass der Ball zuerst das Brett im Punkt R trifft und danach genau in den Mittelpunkt K des Korbs fällt. Der Höhenwinkel beim Abwurf beträgt 40° .



Zeichne die Flugbahn und konstruiere ihren höchsten Punkt!

Beispiel 3 der Online-Materialien

Holzverbindung:

Analysiere die aus drei kongruenten Teilen bestehende Holzverbindung und modelliere sie mit deiner CAD-Software.

Positioniere die Holzverbindung anschließend so, dass sie mit drei Punkten auf der xy-Ebene aufliegt.



Geometrie an der TU

- Architektur
- Bauingenieurwesen
- Geodäsie

**CAD-Kenntnisse
sind notwendig!**

- Inhalte:
 - Raumtransformationen, Boolesche Operationen (im Grundkurs)
 - Interpolation und Approximation
 - Freiformkurven und -flächen
 - Abwickelbare Flächen
 - Subdivision surfaces

TU WIEN **Freiformflächen** **GEOMETRIE**

Karin Zeitlhuber, Reinhard Bernsteiner:
Die Welle: Berufsschule Villach

Preston Scott Cohen:
Torus House: Old Chatham

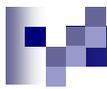
Frank O. Gehry: Experience Music Project

- Freiformflächen sind wegen ihrer großen Bedeutung im industriellen Design (z.B. Automobilindustrie, Schiffbau) entwickelt worden. Sie finden inzwischen auch großes Interesse für repräsentative Architekturen
- Freiformmodule findet man in allen CAD-Systemen

www.geometrie.tuwien.ac.at 58

Handreichung des Forum für Geometrie (FfG)

- Die Arbeiten an der Handreichung sind derzeit in der finalen Phase; das Ergebnis soll durch das bm:bwk veröffentlicht werden.
- Ziel: Hilfestellung für Lehrerinnen und Lehrer beim „neuen DG-Unterricht“
- Einige enthaltene Themenbereiche:
 - Wie kann man elektronische Schularbeiten korrigieren?
 - Was ist bei der Reifeprüfung mit CAD-Einsatz zu beachten?
 - Leistungsfeststellung und -beurteilung



Vielen Dank ...

... für eure/Ihre Aufmerksamkeit.