

**Geometrie –
Tochter der Kunst, Mutter der Mathematik**

**Lehrerfortbildungs-Seminar in Klagenfurt
8. April 2014**

Gunter Weiß (TU Dresden und TU Wien)

Inhalte/Ziele:

a) Wissenschaftsgeschichte:

Kunsthandwerk und Architektur der Antike versinnlichen religiöse und philosophische Weltbilder und erfinden dazu Logik und Geometrie. Proportion und Kommensurabilität - ohne mit Zahlen zu rechnen? Euklid lehrt die Wissenschaften mores: Axiome für das logische Schließen "more geometrico". Herr Euklid begegnet Frau Nichteuklid oder Wie lebt es sich eigentlich auf einer Kugel ?

b) (ebene) Elementargeometrie:

Punkte, Geraden, Kreise: ein einfaches "Lego" mit unendlichen Möglichkeiten. "Pythagoras neu" und andere verblüffende Merkwürdigkeiten. Kongruenz, Ähnlichkeit, Peripheriewinkelsatz - die schmale Werkzeugtasche für effektvolles Beweisen in der Schule.

c) Zahlen bitte!

Wie kommen die Zahlen in die Geometrie und die Mathematik zum Gruppenbegriff? Proportionen, Koordinaten, Kongruenz- und Ähnlichkeitsgruppen, Ornamente.

d) Goldener Schnitt, Ornamente, Origami

Geometrie und Kunst – ein Henne-und-Ei-Problem. Von Ornamenten zur Mathematik, siehe c), und zurück. Mit Origami über Zirkel und Lineal hinauswachsen und dabei „Softskills“ und Kompetenzen analog zum Konstruieren von Hand fördern. Mittelwerte, Goldene, silberne, bronzene Mittelwerte und Spiralen

Das Seminar versucht, Materialien und Stoff für Eigenaktivität der Schüler aller Altersstufen (und ihrer Lehrer) bereitzustellen. Der/die Unterrichtende sollte damit die Schüler spüren lassen, dass Mathematik/Geometrie kein fertig abgeschlossenes Wissensgebilde ist, dass, grob gesagt, vor jeder neuen Handy-Technologie, erst die entsprechende Mathematik auf dem Markt sein muss, Mathematik, die es vorher noch nicht gab! Und es sollte spürbar werden, dass der Unterricht im Wesentlichen auf die Bereitstellung von Strategien zur Lösung von Problemen abzielt, seien sie nun (scheinbar) angewandt oder, ehrlicher, einfach „rein-geometrisch“ bzw. „rein-mathematisch“ und einfach nur schön.

Gunter Weiss
weissgunter@hotmail.com
TU Wien und TU Dresden

Wissenschaftsgeschichte – ein Exkurs über die Wurzeln von Geometrie.

„Geometrie ist Erdmessung, erfunden in Ägypten wegen der Nil-Überschwemmungen“

Stimmt das?

Argument 1: Ägyptens Ackerland ist relativ flach, der Nil strömt nur im Katarakt-Bereich schnell. Die entstehende Schlammflage misst maximal 5 mm! Man sieht nach der Überschwemmung noch jeden Strohalm, geschweige Grenzmarken! ← Neu-Vermessung ist unnötig!

Argument 2: Bis in die Neuzeit wurde die Besteuerung nicht nach der Größe der nutzbaren Fläche, sondern nach dem (durchschnittlichen) Ertrag auf dieser Fläche durchgeführt. In der überwiegenden Mehrzahl war Grundbesitz ohnehin Tempeln und ihrer Priesterschaft bzw. dem Adel zugeordnet. Privateigentum in unserem Sinn für Fellachen gab es nicht, sondern wurde von der Grundherrschaft „verliehen“. (Vgl. den Mittelalterbegriff „Lehen“.) Außerdem war die ärmliche Landbevölkerung sicher nicht in der finanziellen Lage, sich alljährlich eine Landvermessung leisten zu können. Wozu also mehr als grobe Grenzfestlegungen mit zum Teil erheblichen Niemandsländ-Anteilen zwischen Großgrundbesitzungen. Grenzen folgen bis heute oft natürlichen markanten Landschaftsgegebenheiten: Berggraten, Flüssen, Geländebrüchen.

In Dresden mussten nach der Überschwemmung 2002 übrigens auch keine Grundstücksgrenzen nachvermessen werden (vgl. Bild 1)!



Bild 1: a) Überschwemmung in Dresden 2002, b) Spuren im Elb-Schlamm (rechts)
(<http://wolkengalerie.mpch-mainz.mpg.de/HochwasserElbe/bilder/DresdenAug2002.jpg>)

Argument 3: „Geometrie“ ist zwar in Ägypten entstanden, aber nicht als Feldmesskunst, wie heute unreflektiert behauptet, sondern als für den Tempelbau und das Aufstellen von Obelisken nötiges Geheimwissen der Priesterschaft (Bild 1ab). Astronomie und Tempelbau-*Kunst* erfordern Planung, (grafische und verbale) Kommunikation und höchste Präzision bei Messvorgängen! Geometrie transformiert mit Symmetrien, Grundformen und Proportionen Transzendentes/Religiöses in eine Symbolsprache, zu deren Verständnis ein adäquates kulturelles Umfeld gehört. „Sie bildet die Welt ab“ indem sie für ein *Weltbild* architektonische

Entsprechungen ermöglicht. Antiker Pyramiden-, Tempel- und Palastbau spiegeln dieses Weltbild, (vgl. Bild 2).

Man kann und sollte das Wort „Geometrie“ daher besser als Zusammensetzung von Gaia (das ist die antike Göttin der Welt, also die Welt) und Metron (das ist das innere Maß, das Verständnis für die Harmonie und die inneren Zusammenhänge dieser Welt) verstehen.

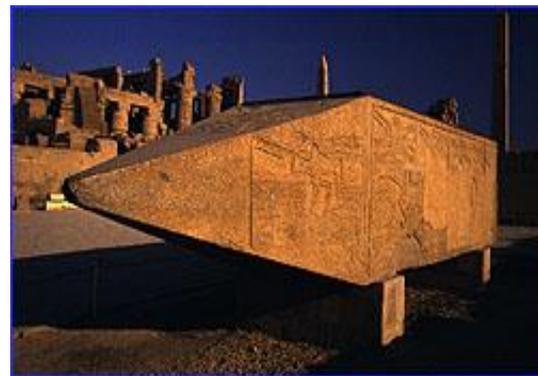
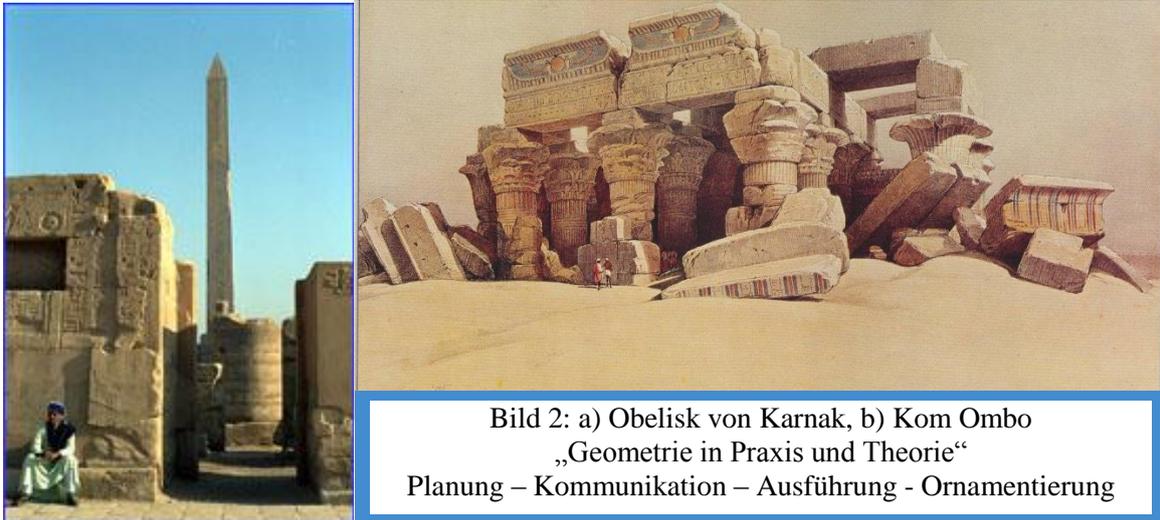


Bild 2: c) Totentempel der Hatschepsut, Deir el Bahari d) Liegender Obelisk, Karnak,
(http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3ATemple_hatchepsout.jpg, Daniel Fafard)
(http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AKarnak_Tempel_Obelisk_04.jpg, Olaf Tausch)

Argument 4: Für das griechische Weltbild war der Aufbau der Materie als Gemisch aus Platonischen Körpern atomistische gedacht und „Kommensurabilität“ vorausgesetzt. (Bei dieser endet also die *Exhaustionsmethode* nach endlich vielen Schritten und liefert damit ganzrationale Proportionalität. Die Entdeckung der *Inkommensurabilität* von Fünfeckseite und –diagonale durch die Pythagoräer bewirkte eine fundamentale Krise dieses Weltbildes! Geometrie war Exerzierfeld für Logik, sodass Platon für seine „Schule von Athen“, der ersten nicht von Priesterhand regierten Akademie der Welt, die folgende Aufnahmebedingung stellte: „Wer der Geometrie nicht mächtig ist, trete hier nicht ein!“ (vgl. Bild.3).

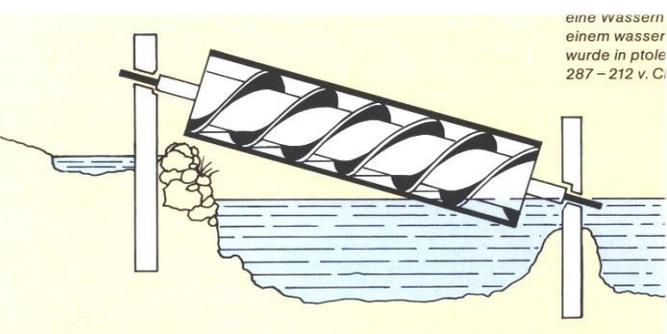


Wer der Geometrie nicht mächtig ist, trete hier nicht ein !

Bild 3: Raffaello da Urbino: „La scuola di Atene“,
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/31/La_scuola_di_Atene.jpg

„Geometrie war und ist auch Basis für technische Entwicklungen.“ Stimmt das?

Argument 1: „Angewandte Geometrie“ mit *Planung – Kommunikationen – Ausführung* ist erforderlich für (Kriegs-)Technologie, Orientierung auf See (Schifffahrt für Handel und Entdeckungen), Bergbau, Bewässerung, Kornmühlen,... Das alles geht nicht ohne Geometrie!



eine wasserräder
 einem wasser
 wurde in ptole
 287 – 212 v. C.

Bild 4: Frühe Kinematik und Mechanik: Wasserräder und Archimedische Schraube.

Argument 2: Das Verständnis für und die Analyse von physikalischen Gegebenheiten bis hin zu technischen Anwendungen erfordert Abstraktion. Die Formulierung und technische Handhabung von „Naturgesetzen“ ist eine solche Abstraktionsleistung. Diese Leistung ist wohl kaum ohne räumliches Vorstellungsvermögen, ohne Logik, ohne das Erkennen funktionaler Zusammenhänge nach dem Kausalitätsprinzip, also ohne Geometrie, möglich. Archimedes und später Leonardo hätten ihre Erfindungen ohne ihr geometrisch-mechanisches Wissen und ihre wohlgeübte Abstraktionsfähigkeit niemals machen können!

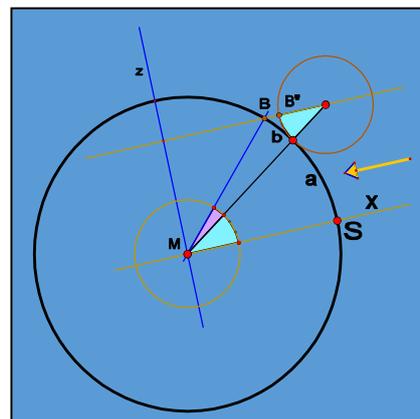
[Es sei angemerkt, dass handwerkliche Tätigkeiten und der konkrete Umgang mit Materialien eben dieses geometrisch-physikalische Grundverständnis für Abläufe und Zusammenhänge schulen. Da das gegenwärtige Umfeld unserer Schüler zunehmend virtuell ist, fehlen in ihrer Entwicklung solche die (Material-) Intelligenz fördernde Stimuli zumeist! Der (naturwissenschaftliche) Unterricht sollte daher beachten, dass Theorie ohne Praxis nicht verinnerlicht wird.]

Als ein Beispiel für das logische Argumentieren und den Umgang mit Proportionen und Ähnlichkeiten in der Antike sei die Erdradius-Bestimmung durch den in Ägypten lebenden Griechen Erathosthenes (~ 225 vor Chr.) erwähnt. (Man beachte, dass zu dieser Zeit weder zweckmäßige Zahlenschreibweisen noch ein Kalkül vorhanden waren und „Sinus“ keine Zahlenwerte, sondern ausschließlich Proportionen von Strecken bedeuteten.)

Bezeichne r den Erdradius, a die Distanz von Syene S (= Asuan) und Alexandria A , $h = AO$ die Höhe eines Obeliskens (= Gnomon) in A , b die Länge von dessen Schatten auf die Erdoberfläche bzw. die Tangentialebene in A bzw. auf ein „Horologium“ (= Halbkugel mit Mitte Obeliskenspitze O), (siehe Bild 5), dann erfüllt r die Proportionsgleichung

$$\frac{r + h}{r} = \frac{\sin((a + b) / r)}{\sin(a / r)}$$

Bild 5: Prinzipskizze für die Erdradiusbestimmung des Erathosthenes (~ 225 vor Chr.)



„Geometrie ist Basis für Entwicklung von Wissenschaften in der Neuzeit.“ Stimmt das?

Argument 1: Es beginnt mit der Wiederentdeckung und Rekonstruktion von Euklids 13 Büchern, den „*Elementen der Geometrie*“, die das antike geometrische Wissen in systematisierter Form enthalten. Dabei wird von *Grundelementen* und *Grundaussagen* (= *Axiomen*), sowie *logischen Regeln* ausgegangen, die es erlauben, wahre Aussagen über „Elementar-Geometrie“ in unbegrenzter Vielzahl abzuleiten. Dabei ist die Proportion der zentrale geometrische Begriff. Die Begriffe „unendlich groß“ und „unendlich klein“ liegen noch im Nebel, wie das berühmte Paradoxon von Achill und der Schildkröte zeigt.

[Anmerkung: Zahlen kommen erst durch R. Descartes in die Geometrie! In der Mathematik gibt es 0 und 1 und den \mathbb{R}^n mit seinem kanonischen Koordinatensystem, in der Geometrie hingegen nicht. Hier muss ein Koordinatenursprung willkürlich (und „problem-angepasst“) gewählt werden, ebenso wie das Koordinatensystem und die Einheitsstrecken. Die Geometrie kennt also bloß Proportionen! Einen modernen Zahl- und Funktionsbegriff entwickelt die Mathematik auch erst im 18. und 19. Jhdt. Der korrekte Umgang mit „unendlich klein“ erfolgt erst um die Wende zum 18. Jhdt. im Zuge der Entwicklung der Differentialrechnung.]

Ab ~ 1600 bis ins 18. Jhdt. sollte jegliche Wissenschaft, selbst die Philosophie, die Rechtsprechung und sogar die Ethik, nach dem Muster der Geometrie, also „more geometrico“, betrieben werden.

In der Geometrie selbst war die Frage nach der Unabhängigkeit und Vollständigkeit des Euklid'schen Axiomensystems ein zentrales Thema, mit dem sich viele Gebildete, auch Nicht-Mathematiker und Nicht-Geometer, auseinandersetzten. Insbesondere ob das Parallelen-Axiom (= Euklids 5. Postulat) von den übrigen abhängt oder nicht, galt als wissenschaftliche Herausforderung und wurde, solange diese Frage ungelöst war, als Skandalon in der Wissenschaft empfunden. Mit der Entdeckung sogenannter *nicht-euklidischer Geometrien* (- in ihnen gilt das euklidische Parallelen-Axiom nicht -) durch J. Bolyai und N.I. Lobatschewski in der ersten Hälfte des 19. Jhdt. wurde für die moderne Physik das Tor geöffnet. Auch die *Raumzeit-Welt* ist eine nicht-euklidischen Geometrie und das Verständnis dieser Geometrie ermöglichte erst die Aktualisierung des allgemeinen Weltbilds auf der Grundlage der (speziellen) Relativitätstheorie.

Erst im 18. Jhdt. erfolgte die Mathematisierung der Geometrie, aber auch die Aufsplitterung in Teildisziplinen, und bis heute ist Geometrie ein wichtiger Stimulus für die Entstehungen neuer mathematisch-geometrischer Sachgebiete. Um 1700 erfolgt die Erfindung der Differentialrechnung durch G.W. Leibniz (1646-1716) und I. Newton (1643-1727). Es ist dabei bemerkenswert, dass Wissenschaftler der Frühaufklärung erstens Universalgelehrte waren, die von der Philosophie und Medizin bis hin zu Physik und Chemie (z.B. Chr. Huygens (1629-1695) und E.W. Tschirnhaus (1651-1708)) forschend tätig waren und zweitens dabei eben dem „*mos geometricus*“ verpflichtet sind!

Es ist überaus spannend, in dieser Frühgeschichte der so dynamischen Mathematik-Entwicklung auch Sackgassen und Irrwege (z.B. von Tschirnhaus) zu finden und zu bemerken, dass Kepler seine Planetengesetze ohne Kenntnis der Differentialrechnung und ohne Newtonsches Gravitationsgesetz formuliert hat. Auch Huygens hat die für die Schaffung extrem genau gehender Uhren wichtige Isochronen- und Tautochronen-Eigenschaft der Zykloide noch ohne Differentialrechnung erkennen müssen, (Bild 6)!

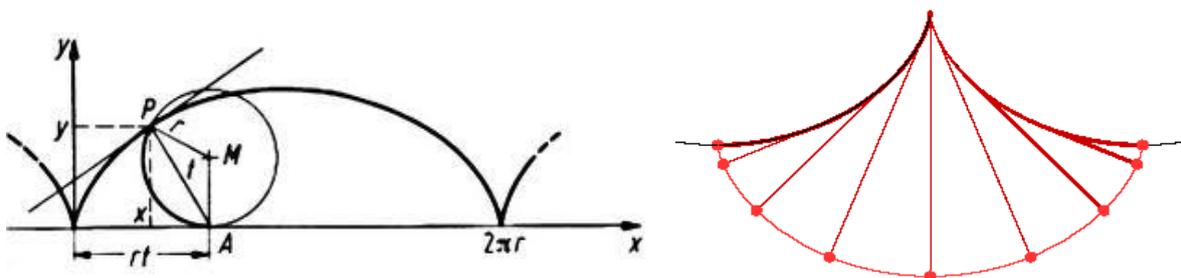
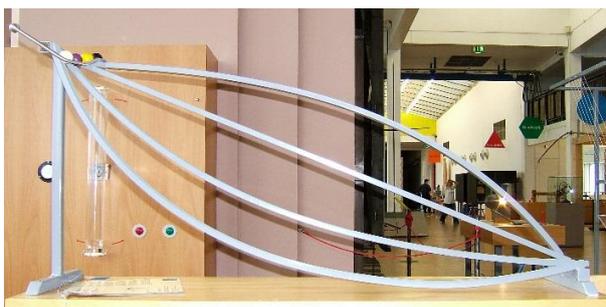


Bild 6: a) Zykloide als Rollkurve erzeugt. b) Zykloidenpendel (Isochronen-Eigenschaft der Zykloide),



b) Brachistochronen-Eigenschaft der Zykloide, (auf ihr – der untersten Bahn - rollt eine Kugel am schnellsten von oben nach unten) und Tautochronen-Eigenschaft (egal von wo die Kugel startet, kommt sie stets nach gleicher Zeit unten an).

<http://de.academic.ru/dic.nsf/dewiki/1369996>

[Anmerkung: Die Zeit der Entdeckungsfahrten und der marinen und terrestrischen Erd- erkundung war mit dem Bedürfnis nach zweckmäßigen Land- und Seekarten ein ganz wesentlicher Stimulus für die Entwicklung von Geometrie und Mathematik. Wichtige Begriffe der Differentialgeometrie gehen auf die in dieser Zeit aufblühende Kartographie zurück! Während sich die geographische Breite leicht durch Sonnen- und Sternpeilungen feststellen lässt, ist die geographische Länge zunächst nur durch genau gehende Uhren feststellbar. Vor der Erfindung der Federunruhe sind notgedrungen Pendeluhren mit vom Ausschlag unabhängigen Schwingzeiten, also Zykloiden-Pendeluhren, das Mittel der Wahl gewesen.]

Um sich das Weltbild und die Denkweise in der Zeit der Frühaufklärung vergegenwärtigen zu können sei hier kurz auf das Hauptwerk von **E.W.v. Tschirnhaus** eingegangen, seinem lateinisch verfassten philosophischen Busch „*Medicina mentis sive artis inveniendi praecepta generalia*“ (Lipsiae 1695 (2.Auflage)), von dem es eine deutsche Übertragung gibt (Hrsgb. J. Haussleitner, R. Zaunick, Acta Historica Leopoldina, Leipzig 1963). Tschirnhaus ist heute noch bekannt für seine mathematisch-geometrischen Beiträge zur geometrischen Optik („Tschirnhaus-Kubik“) und zur Algebra („Tschirnhaus-Algorithmus“). In den Materialwissenschaften war er führend in der Brennspiegel-Technologie und gilt, als Vorgesetzter von J.F. Böttger (1682-1719), als das wissenschaftliche Gehirn hinter der Erfindung des europäischen Porzellans. Während sein Versuch, auch in Sachsen eine Akademie der Wissenschaften nach dem französischen Vorbild einzurichten, zunächst scheiterte, gelang es ihm aber, Mathematik als Unterrichtsgegenstand an sächsischen Gymnasien einzuführen. Seine „Methodik der Mathematik und Physik“ war lange Zeit nach ihm noch in Gebrauch, (seine „Methodik der Spracherlernung“ erwies sich dagegen als weniger brauchbar). Die folgenden Figuren sind aus der „*Medicina mentis*“ entnommen und sollen eine bis heute fruchtbare Strategie mathematischen Forschens zeigen: das schrittweise Verallgemeinern eines einfachen, evidenten Sachverhaltes.

Von den „Faden-Konstruktion“ des Kreises und der Ellipse gelangt Tschirnhaus durch Verwendung von weiteren Brennpunkten zu Verallgemeinerungen der Ellipse, siehe Bild 7. Er war der (allerdings falschen) Annahme, dass sich so *jede* Kurve erzeugen ließe. Dass man dafür u.U. unendlich viele Brennpunkte und damit auch unendliche Fadenlänge benötigen würde, hat er nicht berücksichtigt.

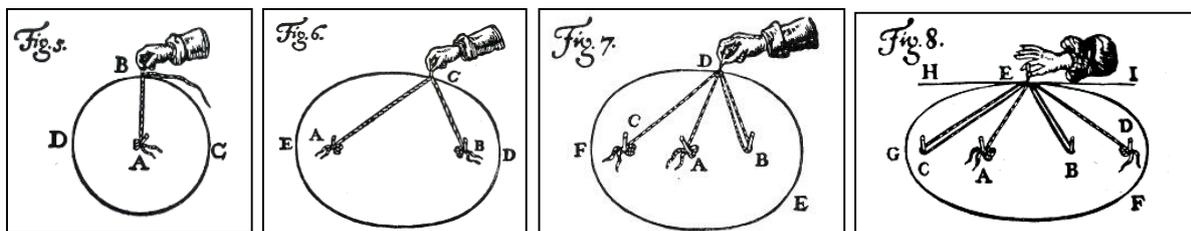


Bild 7: Tschirnhaus'sche Fadenkonstruktion für Kurven mit mehreren Brennpunkten

Es muss aber doch erstaunen, dass Tschirnhaus aufgrund der damals allgemein bekannten Brennpunktseigenschaften von Parabel und Hyperbel für seine Fadenkonstruktionen durchaus auch unendlich ferne Brennpunkte und Fadenlängen-Differenzen (statt -Summen) zulässt, (Bild 8 links). Insbesondere die Fadenkonstruktion von Parabel und Hyperbel haben in Sachsen bis in die DDR-Zeit überlebt (siehe Bild 8 rechts; diese Figuren sind der „Kleine Enzyklopädie Mathematik“, VEB Leipzig 1967, entnommen)!

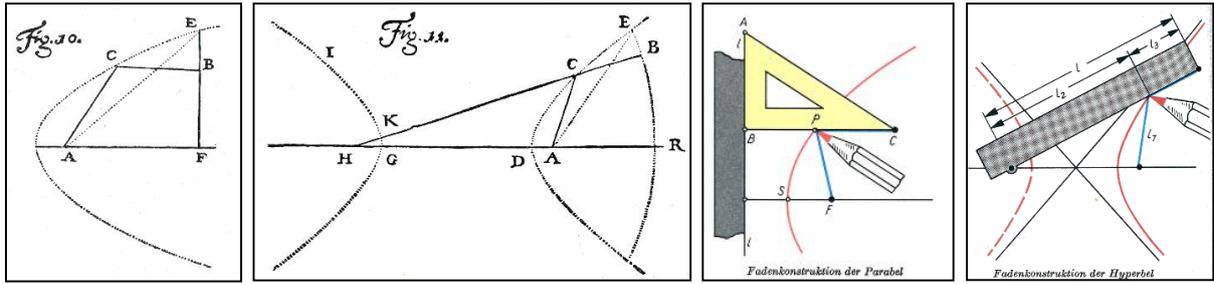


Bild 8: Tschirnhaus'sche Fadenkonstruktion für Parabel- und Hyperbelbogen und ihre Überlieferung in der „Kleinen Enzyklopädie Mathematik“ der DDR.

Tschirnhaus folgert, dass aus seinen Fadenkonstruktionen auch die *Tangentenkonstruktion* der so erzeugbaren Kurven *ohne Differentiation* möglich ist. Hierbei bedient er sich einer Überlegung aus der Mechanik der Kräfte: In einem Kurvenpunkt müssen alle Fadenspannungen gleich sein; man hat also die Resultierende gleichlanger, in Fadenrichtung weisender Kraftvektoren zu konstruieren, um einen Kurven-Normalvektor zu erhalten, siehe Bild 9.

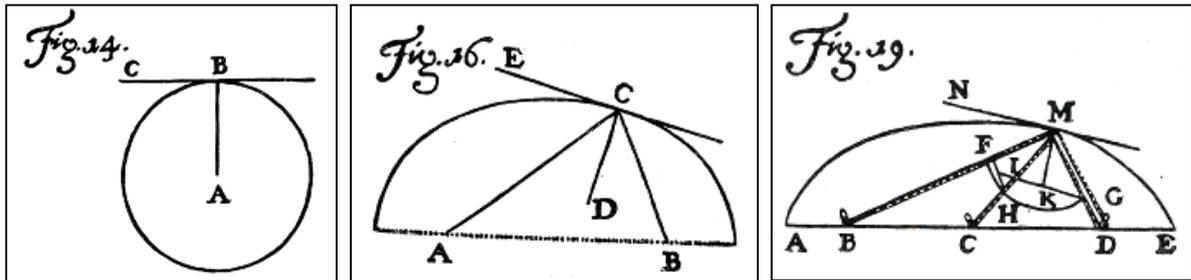


Bild 9: Tschirnhaus'sche Tangentenkonstruktion für Brennpunktskurven

Tschirnhaus hatte auch die Idee, Brennpunkte zu durch Fadenkonstruktion gewonnene Kurven zu verallgemeinern und kommt so von der Kreisevolvente zu weiteren Kurven, für die ebenfalls Tangentenkonstruktionen ohne Differentiation möglich sind, siehe Bild 10.

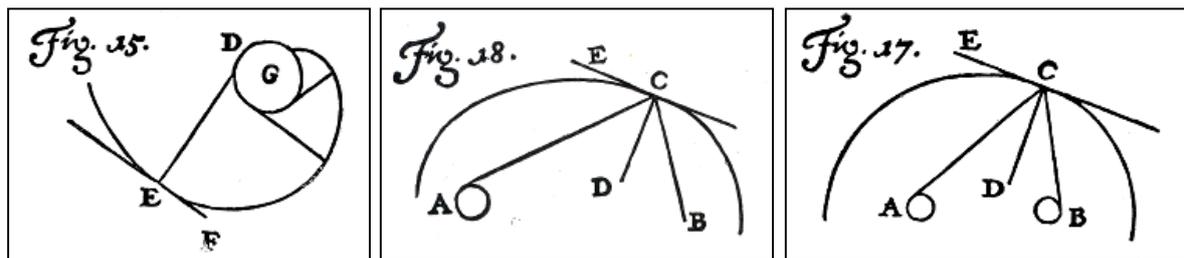


Bild 10: Tschirnhaus'sche Fadenkonstruktion für Kurven mit zu Kreisen verallgemeinerten Brennpunkten

Eine moderne Auffassung dieser Tschirnhaus'schen Ideen würde diese Beispiele der „ars inveniendi“ zur (ebenen) Kinematik zählen. Auch für durch Mechanismen erzeugte Kurven ist vermöge des sogenannten Polplans die Tangenten-Bestimmung ohne Differentiation möglich. Auch räumliche Verallgemeinerungen sind naheliegend. Manche dieser Ideen von Tschirnhausen Ideen können, wie ich meine, mit einfachen Mitteln durchaus schulrelevant umgesetzt werden.

Als Kuriosum logischen Schließens sei noch auf die Tschirnhaus'schen Überlegungen zu den Fallgesetzen eingegangen, woran er Überlegungen zum horizontalen Wurf und zur Brachistochronen-Eigenschaft der Zykloide anschließt, Bild 11 und Bild 12:

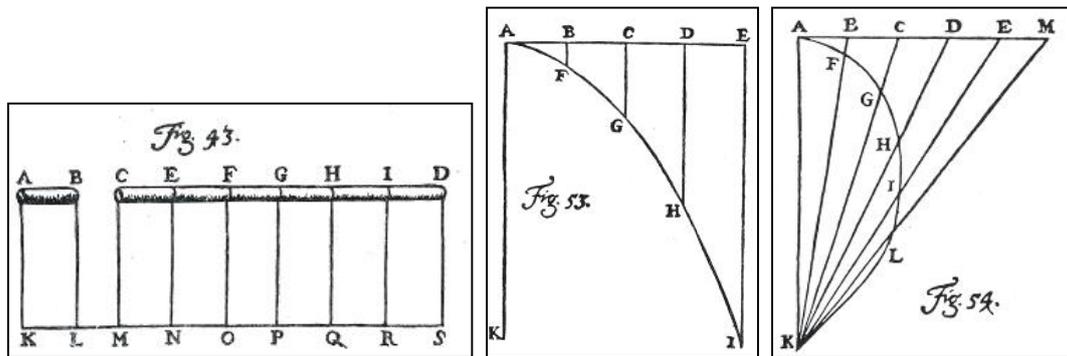


Bild 11: Fig 43, „alle Körper fallen gleich schnell“; Fig 53, „Wurfparabel, Schwerfeld ist (konstantes) Parallelfeld“; Fig 54, „Wurfburve, Schwerfeld ist ein (konstantes!) Zentralfeld“

Man beachte, dass Tschirnhaus das Newtonsche Gravitationsgesetz, dass nämlich die Anziehungskraft eines Massepunktes vom Quadrat der Entfernung von diesem abhängt, noch nicht bekannt war und er sich, so wie beim Parallelfeld auch, den konstanten Anziehungskraftvektor auf seiner Wirkungslinie verschieblich vorstellte und so zu Fig 54 (Bild 11) gelangte.

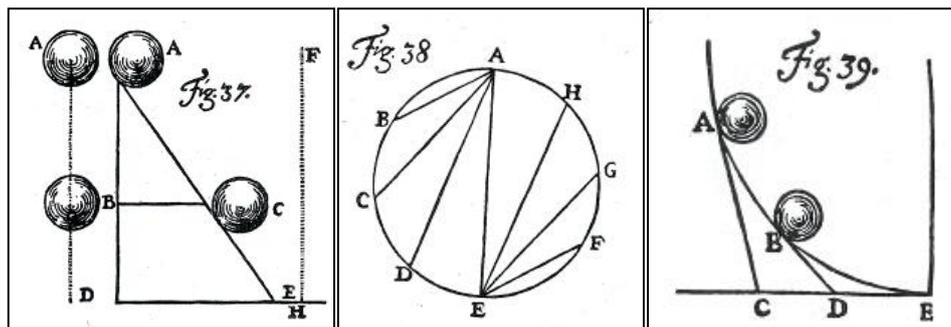


Bild 12: Fig 37 „Rollen auf schiefer Ebene“; Fig 38 „Im Parallelschwerfeld benötigt eine rollende Kugel für alle angegebenen Bahnstrecken gleiche Zeiten“; Fig 39, „infinitesimales Zusammensetzen der Linienelemente aus Fig 38 erzeugt eine Zykloide“

Dass Tschirnhaus durchaus schon ein Gefühl für „unendlich klein“ hatte, beweist die Wiedergabe des Prinzips von B. Cavalieri (1598-1647) in der „medicina mentis“ (Bild 13). Er hat die Ideen von Leibniz zur Differentiation vermutlich wohl verstanden, sie aber als überflüssig erachtet.

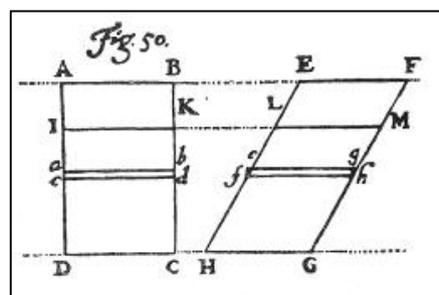


Bild 13: Fig 50, „Erläuterung zum Cavalieri-Prinzip, (unendlich klein ist nicht nichts!)“

Elementargeometrie

Punkte, Geraden Kreise – ein einfaches „Lego“

Anschauungsebene und Anschauungsraum

Schauplatz der Elementargeometrie ist die naiv erfassbare „Anschauungsebene“ bzw. der „Anschauungsraum“. Dabei wäre, ganz im Sinne der Auffassung von Euklid, erst einmal klar zu stellen, was diese Ebene bzw. dieser 3-Raum ist. Es erweist sich als zweckmäßiger, darüber zu reflektieren, was in man in einer solchen Ebene (in einem solchen Raum) tun darf und was es für Grundtatsachen und –begriffe gibt oder geben sollte. Man beginnt also (meist unbewusst) mit einem riesigen Abstraktionsschritt: „Man muss nicht wissen, was etwa ein Punkt wirklich ist, sondern bloß, wie man damit umgeht!“ Diese wichtige Erkenntnis stammt von D. Hilbert (1862-1943), aber gehen wir im täglichen Leben nicht genau so mit modernen technischen Hilfsmitteln und sogar mit der Natur so um? Der mit dem Bleistift gezeichnete Graphitfleck ist schließlich nur das Modell eines abstrakten Punktes, und das Hantieren damit genügt gewissen vernünftigen Regeln sodass das Weitere wiederum Modell eines abstrakten Sachverhaltes ist. Zeichengenauigkeiten führen dann eben zu wenig brauchbaren Modellen dieser abstrakten Sachverhalte.

Bleiben wir zunächst in der *Anschauungsebene*, in der also für die abstrakten Begriffe sowohl wie für deren modellhafte Realisierungen folgende „zehn Gebote“ gelten mögen:

- Punkte und Geraden (= Punktmenge!) sollen *existieren* und *frei gewählt* werden können. Zwei verschiedene Punkte P, Q sollen eine eindeutige Gerade g bestimmen, auf der sie liegen, die „Verbindungsgerade“.
- Man soll sagen können, welche Punkte der Verbindungsgeraden g *zwischen* P und Q liegen. Die Menge dieser Punkte heißt „Strecke“ mit Randpunkten P, Q . (Beachte: Durch die Zwischen-Relation ist auch eine „Größer-Relation“ für Strecken und eine *Anordnung* auf g erklärt!
- Man soll *parallelverschieben, drehen* und *spiegeln* können und dabei sollen Strecken *gleichlang* bleiben. (Beachte: „gleichlang“ bedeutet nicht, dass man die Länge in einer durch Konvention festgelegten Maßeinheit angeben können muss! Spiegeln meint zunächst beides, Spiegelung an einem Punkt und Spiegelung an einer Geraden.)
- Man soll entscheiden können, ob zwei Geraden parallel sind oder nicht. Nicht parallele Geraden sollen einen eindeutigen Schnittpunkt haben, parallele (/verschiedene) Geraden haben keinen Schnittpunkt.
- Die von einem Punkt ausgehenden Strecken gleicher Länge haben (daher) ihren zweiten Endpunkt auf einem *Kreis* mit dem ersten, gemeinsamen Endpunkt als *Mittelpunkt*. Diese Strecken heißen *Radien* des Kreises. (Beachte: „Radius“ ist eine Strecke und keine Zahl!)
- Die Existenz eines Kreises soll durch frei gewählten Mittelpunkt und frei gewählten Radius gewährleistet sein.
- Zwei Kreise schneiden einander genau dann, wenn für ihre Mittelpunktsstrecke und die beiden Radien die *Dreiecks-Ungleichung* gilt, d.h. es gilt
$$z < r_1 + r_2, \quad r_1 < r_2 + z, \quad r_2 < r_1 + z.$$
- Man soll die Anschauungsebene an jeder Geraden a spiegeln können. Dabei heißt a *Spiegelachse*, sie ist die Menge der bei der Spiegelung fest bleibenden Punkte. Die Verbindungsgeraden von Ur- und Bildpunkt werden bei der Spiegelung in sich abgebildet

und heißen „zu a rechtwinklige (normale, orthogonale) Geraden“. Normalstehen soll eine symmetrische Relation für Geraden sein.

- Für zwei Strecken soll ein (eindeutiges) *Längenverhältnis (Proportion)* angegeben werden können. (Beachte: Auch hierbei sind keine Längenmaßzahlen erforderlich, es genügt die antik-griechische *Exhaustionsmethode* für Strecken zur Bestimmung dieser Proportion.)
- Es sollen der *Strahlensatz* und damit die Kongruenz- und Ähnlichkeitssätze für Dreiecke gelten. (Beachte dabei: „*Winkel*“ ist eine geometrische Figur und vom durch Konvention festgelegten *Winkelmaß* zu unterscheiden!)

Anmerkung: Die angegebenen „Gebote“ sind dem Umgang mit üblicher CAD-Software angepasst. Die im Folgenden vorgestellten Beispiele sind als Anregungen aufzufassen, die noch, je nach Vorwissen der Schüler, methodischer Ausarbeitung bedürfen!

Kombinatorischer Ansatz der Ableitung zusätzlicher Grundelemente und Sachverhalte

Beispiel 1: Gegeben sind 2 (verschiedene) Punkte der Anschauungsebene.

Dann existiert die Verbindungsgerade g und die Verbindungsstrecke. Mit dieser Strecke und den Punkten als Mittelpunkte sind zwei (gleich große) Kreise bestimmt, wobei offenbar die Dreiecksungleichung erfüllt ist. Es gibt also Schnittpunkte und eine neue Verbindungsgerade s , die als Spiegelachse aufgefasst werden kann und die ursprüngliche Strecke im Mittelpunkt hälftet. Jeder neue Punkt kann wieder Mittelpunkt eines Kreises sein, für den eine (neue oder alte) Verbindungsstrecke als Mittelpunkt gewählt werden kann. Dabei entstehen immer wieder neue Punkte und Strecken, sodass zwei Angabe-Punkte genügen um unendlich viele weitere zu gewinnen, siehe Bild 14.

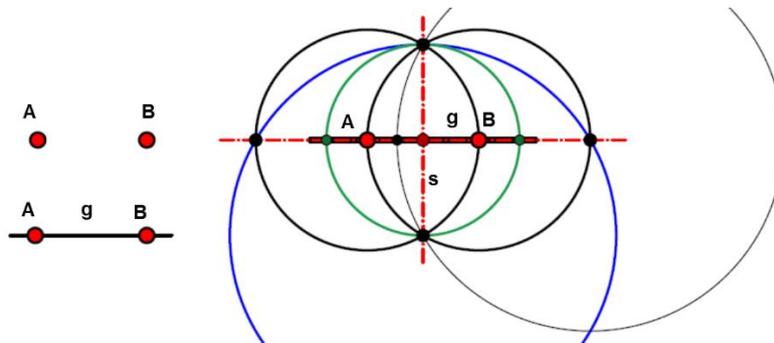


Bild 14: Aus einem Punktepaar ableitbare weitere Grundelemente Punkte, Geraden, Kreise.

Anmerkung: Da das obige Verfahren durchaus verschiedene Vorgehensweisen zur Fortsetzung der Punkt- und Kreisfolgen gestattet, könnten Schüler ihre jeweils individuelle auf g oder s entstehende Punktfolge „erforschen“ und durch einfache Pythagoras-Anwendung auch interessante Zahlenfolgen ableiten. Da jeder Kreis mit einem Durchmesser zwei (zur Mitte spiegelbildlich liegende) Schnittpunkte hat, könnte an diesem Beispiel auch schon das Prinzip der Bifurkation erkennbar werden. Auch das Mosaik aus gleichseitigen Dreiecken (und regelmäßigen) Sechsecken folgt aus der Angabe zweier Punkte, (Bild 15)! Ebenso kann die Existenz eines gemeinsamen Schnittpunktes der drei Symmetrieachsen des gleichseitigen Dreiecks erschlossen werden, der damit Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks sein muss.

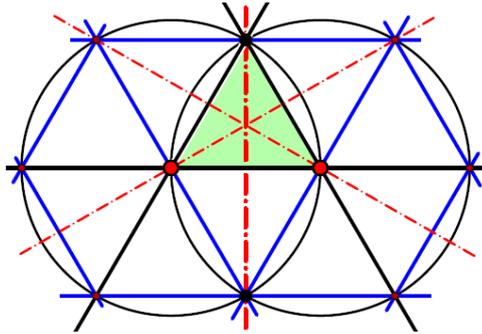


Bild 15: Aus einem Punktpaar abgeleitetes Netz aus gleichseitigen Dreiecken

Beispiel 2: Gegeben sind ein Punkt P und ein nicht durch ihn gehende Gerade g .

Dann sind eine Punkt- und eine Geradenspiegelung bestimmt, die eine neue Gerade und einen neuen Punkt liefern, an denen erneut gespiegelt werden kann. Die entstehende Folge von Punkten und Geraden kann als elementarer Fries gedeutet werden, (Bild 16). Für den Schüler sollte dabei die Erzeugung des Frieses durch Translation offenbar werden und damit auch der Zusammenhang von Schiebung und Spiegelung.

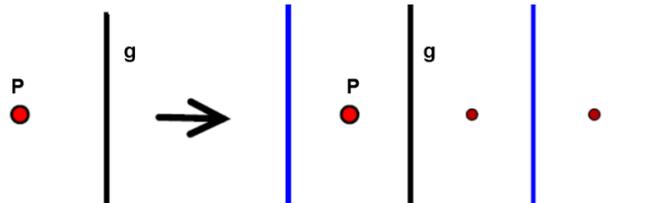


Bild 16: Aus einem Paar (Punkt, Gerade) mittels Spiegelungen abgeleitetes elementares Fries.

Die Spiegelung von P an g liefert einen neuen Punkt Q und damit die Verbindungsgerade $PQ=h$, die g im Mittelpunkt H der Strecke $[PQ]$ schneidet und normal zu g ist, Bild 17. Es ist dann für $X \in g, X \neq H$, vermöge der Dreiecksungleichung $[PQ] < [PX] + [XQ] \approx 2[PX]$ offensichtlich, dass $[PH]$ unter allen Strecken $[PX], X \in g$, die kleinste ist. *Damit ist ein als Extremwertaufgabe formulierbares Problem ohne Differentiation gelöst!*

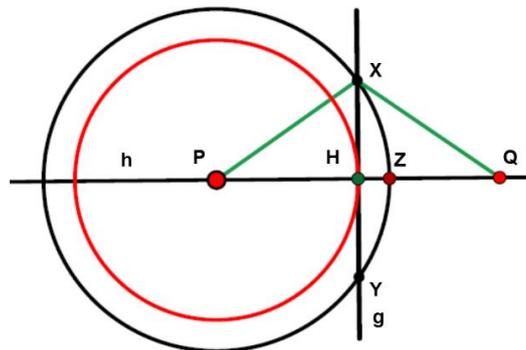


Bild 17: Abstand eines Punktes P von einer Geraden g , Tangenten-Eigenschaft eines Kreises.

Der zu X bezüglich h spiegelbildliche Punkt Y liegt wegen $[PX] \approx [PY]$ am Kreis mit Mitte P und Radius $[PX]$. Damit sind Begriffe wie „Sehne“, „Sehnenstrecke“, „Innengebiet eines Kreises“ erklärbar. Der Kreis mit Mitte P und Radius $[PH]$ hat mit g genau H gemeinsam; g ist als „Tangente“ dieses Kreises mit dem „Berührungspunkt“ H erklärt, die Eigenschaft des Normalstehens von Berührradius und Tangente folgt ebenfalls.

Es ist naheliegend, weitere Beispiele mit zwei gegebenen Grundelementen, z.B. Punkt und Kreis oder zwei Kreise zu behandeln. Als methodische Klammer erweist sich bei all diesen Untersuchungen die Verwendung von Spiegelungen ganz im Sinne F. Bachmanns „*Aufbau der Geometrie(n) aus dem Spiegelungsbegriff*“ (Springer, 2. Aufl. 1973).

Für zwei gegebene nicht parallele Geraden lassen sich nach dem Muster des elementaren Frieses (Bild 16) im Fall einer erfüllten „Schließungsbedingung“ *elementare Rosetten* und *reguläre n-Ecke* ableiten. Ebenso folgen die Begriffe „Halbgerade“, „Winkel“ und „Winkelsymmetrale“ und die Orthogonalität des Winkelsymmetralen-Paares zweier schneidender Geraden. Insbesondere können orthogonale Geraden für sich schon zu interessanten Folgerungen führen, die den Peripheriewinkelsatz und den Satz von Pythagoras vorbereiten, siehe Bild 18.

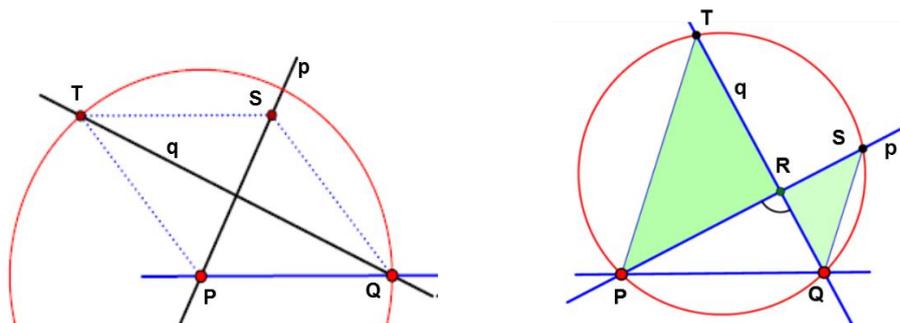


Bild 18: Büschel orthogonaler Geraden p, q durch feste Punkte P, Q .

Links: Spiegelbilder S und T von P und Q an q bzw. p und der Bahnkreis des Punktes T .

Rechts: Punkte S, T mit $[PS] \approx [QT] \approx [PR] + [RQ]$, gemeins. Bahnkreis von S und T

Die in Bild 18 dargestellten Sachverhalte lassen sich, zunächst mit dynamischer Software erzeugt, einfach begründen.

Beweis-Werkzeuge der Elementargeometrie:

a) Thales-Satz und Peripheriewinkelsatz

Für den Beweis des Satzes von Thales, dass nämlich die Scheitel eines rechten Winkel mit Schenkeln durch zwei feste Punkte P und Q genau auf einem Kreis mit der Durchmesserstrecke $[P, Q]$ liegen, wird ein Spiegelungsargument und der Strahlensatz herangezogen (Bild 19, links). Für den Peripheriewinkelsatz, dass die Scheitel eines festen Winkels mit Schenkeln durch zwei feste Punkte genau auf einem Kreis(bogen) mit der Sehnenstrecke $[P, Q]$ liegen, wird ebenfalls mit Spiegelungen, mit der Innenwinkelsumme im Dreieck und damit argumentiert, dass die Summe zweier Innenwinkel gleich dem (oder besser kongruent zum) Außenwinkel in der dritten Ecke des Dreiecks ist, vgl. Bild 19, rechts.

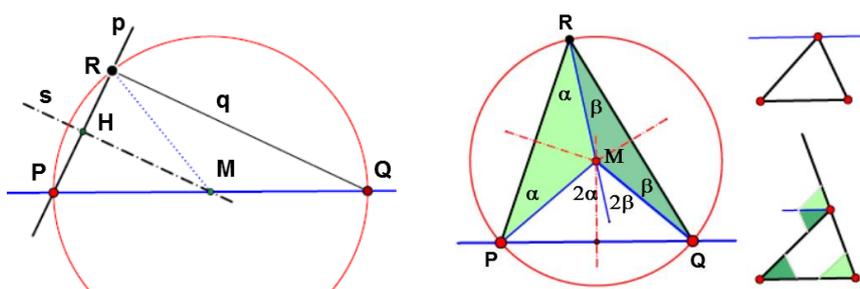


Bild 19: Der Satz des Thales (links), der Peripheriewinkelsatz (rechts)

Es ist im Sinne von Tschirnhaus nun naheliegend, einen der Punkte P und Q oder beide durch Kreise zu ersetzen und die Schenkel des gegebenen festen Winkels als Tangenten dieser Kreise anzunehmen. Das Gleiten eines Schenkels durch einen Punkt kann auch mit dem Gleiten des Winkelscheitels entlang einer Geraden oder eines Kreises kombiniert werden, wobei die Hüllkurve des zweiten Schenkels zu suchen ist. Auch hier finden Schüler mittels dynamischer Geometrie-Software rasch interessante Ergebnisse.

[Anmerkung: Der Thales-Satz (und der Peripheriewinkelsatz) sollte, sobald die Schüler den Umgang mit dem Vektor-Kalkül erlernen, auch rechnerisch bewiesen werden. Dabei sollte erkennbar werden, dass der Vektor-Kalkül eigentlich koordinatenfrei und sogar dimensions-unabhängig funktioniert. Es ist der Nachhaltigkeit des Unterrichts sicherlich dienlich, wenn Problemstellungen aus der Unterstufe später erneut aufgegriffen und mit anderen Mitteln behandelt werden.]

b) Der Satz von Pythagoras und seine Erweiterungen

Zum Satz von Pythagoras gibt es für jede Schüler-Altersstufe didaktisch wertvolle Beweise. Höhen- und Kathetensatz werden dann mittels Ähnlichkeit von Dreiecken abgeleitet. Hier soll nur auf die Möglichkeit hingewiesen werden, dass der oben erläuterte „kombinatorische“ Ansatz auch zu weiteren, durchaus interessanten Fragen und Folgerungen führt.

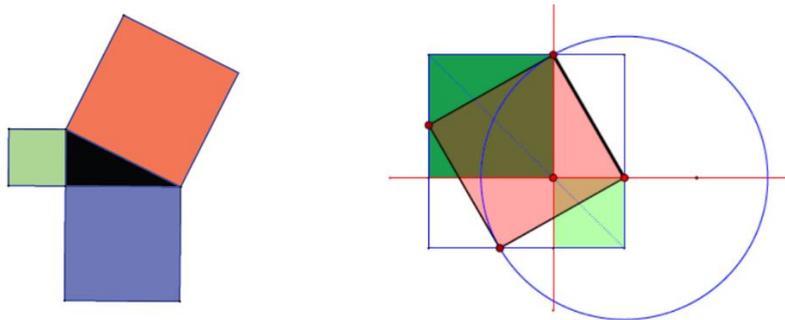


Bild 20: Der Satz des Pythagoras üblich visualisiert (links),
ein einfacher geometrischer Beweis (rechts),

Bei mit dynamischer CAD-Software erzeugter Figur Bild 20 (rechts) wird auffallen, dass bei fester Hypotenusen-Strecke das Quadrat mit der Katheten-Summe als Seite in seiner Größe variiert, sodass sich zusätzlich eine Extremwertaufgabe anbietet.

H. EBISUI (2012) hatte die Idee, das von den Quadratecken gebildete Sechseck zu betrachten und auf drei von dessen Seiten wieder Quadrate zu errichten. Dabei ergeben die neuen Quadratecken wieder ein Sechseck, dessen Seiten parallel zu denen des ersten Sechsecks sind, sodass sich der Prozess des Quadrat-Ansetzens erneut durchführen lässt, Bild 21. Bei diesem Iterationsverfahren liefert jeder zweite Schritt Quadrate, die zum (rechtwinkligen) Ausgangsdreieck parallele Seiten haben und es gilt der

1. Satz von Pythagoras-Ebisui: *Die Summe der Inhalte der zu den Katheten-Quadraten parallel liegenden Quadrate ist in jeder Iterationsstufe gleich dem Inhalt des zum Hypotenusen-Quadrat parallel liegenden Quadrates.*

Die Quadrate der Zwischenstufen des Iterationsprozesses lassen sich mit den Ecken des (rechtwinkligen) Ausgangsdreiecks assoziieren, (Bild 21). Ebisui hat auch für diese jeweils drei Quadrate eine höchst merkwürdige Beziehung gefunden:

2. Satz von Pythagoras-Ebisui: Die Summe der Inhalte der mit den Hypotenusen-Ecken assoziierten Quadrate ist für jede Iterationsstufe gleich dem fünffachen Inhalt des mit der Rechtwinklecke assoziierten Quadrates.

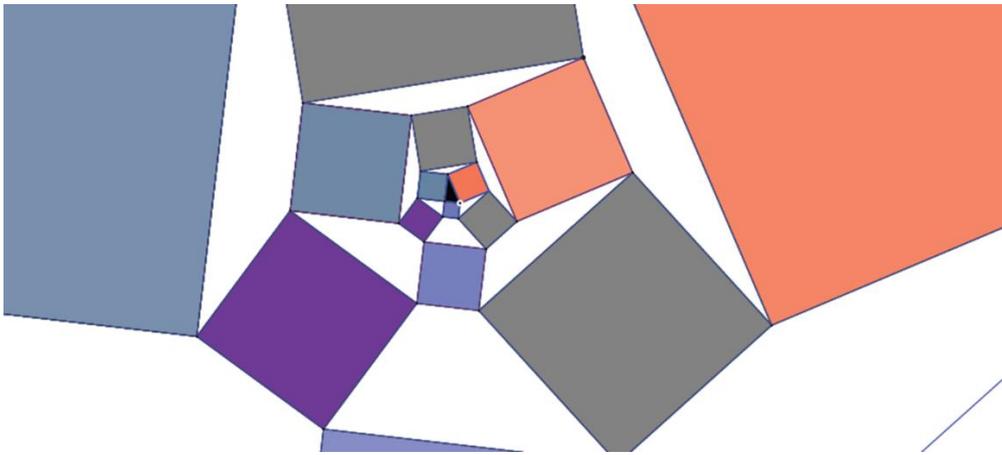


Bild 21: Visualisierung der Erweiterungen des Satzes von Pythagoras nach H. Ebisui.

[Anmerkung: Eine elegante Beweismethode betrachtet die Figur in der Gaußschen Zahlenebenen. Aber auch die elementare Vektorrechnung ist zielführend.]

Betrachtet man in jeder Stufe die ersten Diagonalen der Sechsecke, also die Strecken, die jede Ecke mit der jeweils übernächsten verbinden, so stellt man fest, dass Schnittpunkte benachbarter Diagonalen auf sechs kopunktalen Geraden liegen, die noch dazu normal zu den Sechseckseiten sind, Bild 22. (Beachte, dass aber jede Folgen paralleler Quadrate nicht in eine einzige zentrische Ähnlichkeit passt!). Es ist erstaunlich, dass dieser Sachverhalt auch dann gilt, wenn als Ausgangsdreieck ein beliebiges Dreieck gewählt wird, siehe Bild 21 (rechts)! Der gemeinsame Schnittpunkt der in Rede stehenden sechs Geraden ist übrigens der *Schwerpunkt* des Ausgangsdreiecks.

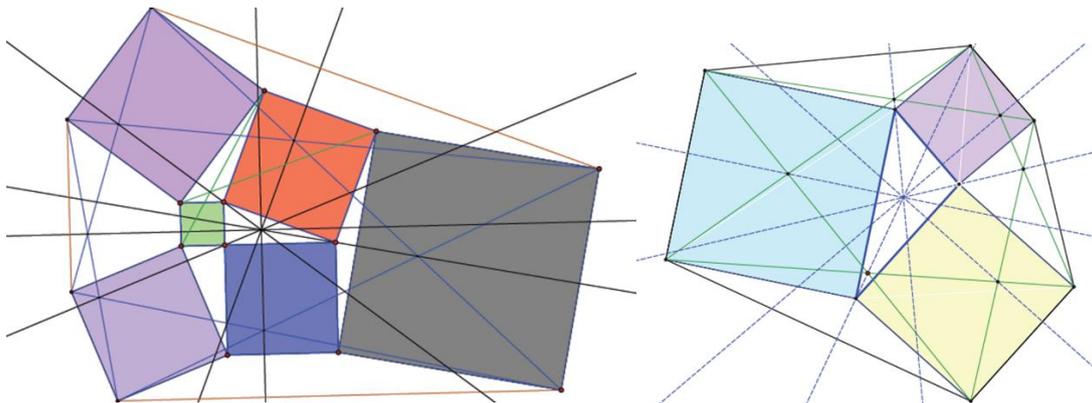


Bild 22: Die Schnittpunkte der ersten Diagonalen der Ebisui-Sechsecke liegen auf 6 kopunktalen Geraden, die außerdem zu den Sechseckseiten normal sind.

c) Die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis

Auch wenn seine Schulrelevanz durchaus in Frage gestellt werden kann, sei als letztes noch kurz auf das Beweishilfsmittel „Potenzsatz“ eingegangen werden, einen Sachverhalt, der sich an die Angabe zweier Grundelemente, nämlich Punkt und Kreis, anschließt. (In Bild 23 ist der gegebene Punkt P ein Außenpunkt des Kreises k .) Für jede k schneidende Gerade durch P gilt,

dass das Produkt der Längen der Sekanten-Abschnitte konstant gleich dem Quadrat der Länge der Tangentenstrecke $[P,T]$ ist. Für einen Innenpunkt P von k ist diese Aussage geeignet zu modifizieren.

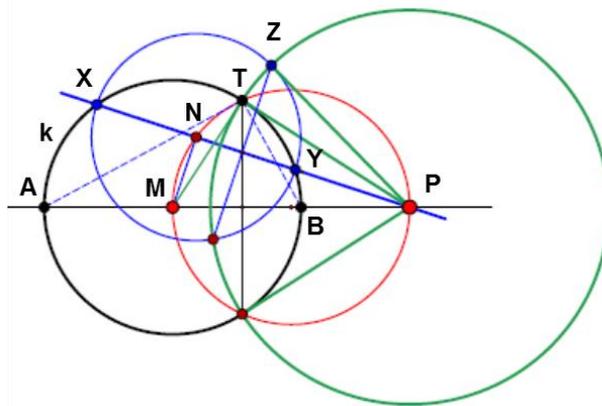


Bild 23: Visualisierung des „Potenzsatzes“, (P ist Außenpunkt des gegebenen Kreises k).

Der am einfachsten rechnerisch geführte Beweis schließt zunächst für die Durchmessergerade MP , dass gilt $|P,A| \cdot |P,B| = |P,T|^2$. Für eine weitere Gerade durch P , die k in X und Y schneidet, hat man nur noch zu zeigen, dass der Thales-Kreis über $[X,Y]$ die gleiche Tangentenstreckenlänge von P aus bestimmt, wie k . (Der Kreis mit Mitte P und Radius $[P,T]$ schneidet alle Kreise des Kreisbüschels durch X und Y orthogonal.)

Einige elementargeometrische Sachverhalte

Die klassischen, des Merkens würdigen Punkte und Linien des allgemeinen Dreiecks werden hier als bekannt vorausgesetzt. Auch hier würde die von Tschirnhaus angeregte Vorgangsweise zu weiteren Besonderheiten führen. Im Folgenden werden einige elementargeometrische Sachverhalte illustriert, die das Beweisbedürfnis wecken sollen. (Im Seminar-Vortrag werden hierzu Anleitungen gegeben.)

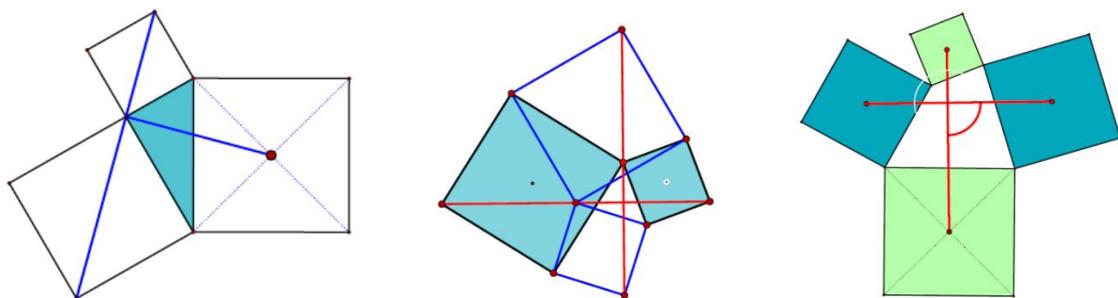


Bild 24: Die zur gemeinsamen Diagonale der Katheten-Quadrate normale Gerade geht durch den Mittelpunkt des Hypotenusen-Quadrates (links). Gegeben sind zwei in einer Ecke zusammenhängende Quadrate; aus der Mitte der Verbindungsstrecke der Gegenecken werden die übrigen Eckenpaare unter rechtem Winkel gesehen (Mitte). Für eine geschlossene Kette von vier Quadraten gilt, dass die Verbindungsstrecken der Mittlen gegenüberliegender Quadrate orthogonal und gleich lang sind (rechts).

Es stellt sich die Frage, ob die Quadrat-Ketten von Bild 24 auch durch Ketten bestehend aus anderen ähnlichen Figuren ersetzt werden können. Hier bieten sich zunächst gleichseitige Dreiecke als Grundfigur an. Eine geschlossene Kette von drei gleichseitigen Dreiecken (mit nach außen weisenden Ecken) führt bekanntlich auf den Fermat-Steiner-Punkt F eines

allgemeinen Dreiecks ABC , Bild 25 (links). Ist kein Winkel des Dreiecks größer als $\frac{2\pi}{3}$, so ist F ein Innenpunkt des Dreiecks und die Summe der Streckenlängen $|FA| + |FB| + |FC|$ ist minimal. Mit dem Argument minimaler potenzieller Energie von gleichen Gewichten, die an durch A, B, C laufenden Fäden hängen, erschließt man, dass diese Fäden einen Winkel von $\frac{2\pi}{3}$ bilden müssen. Damit kann F im Schnittpunkt zweier Peripheriewinkelkreise gefunden werden. Auch hierbei wird also eine Extremwertaufgabe mit geometrisch-mechanischen Mitteln ohne Differentiation gelöst!

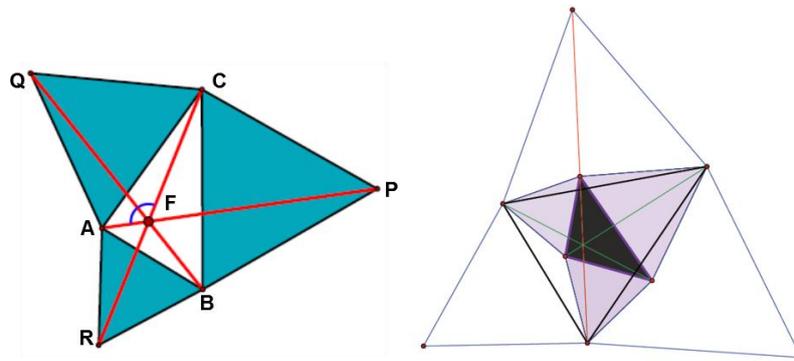


Bild 25: Kette von drei gleichseitigen Dreiecken. Deren Außenecken bilden ein Dreieck PQR , das mit dem Dreieck ABC der anderen Ecken perspektiv liegt. Die Strecken $[AP]$, $[BQ]$, $[CR]$ sind gleichlang und schneiden einander im **Fermat-Steiner-Punkt** F von ABC unter $2\pi/3$; (links). Das Ansetzen von gleichseitigen Dreiecken an das Dreieck PQR und weitere Iteration liefert eine Folge von perspektiv liegenden Dreiecken; (rechts).

Wir schließen eine weitere Extremwertaufgabe an:

Auf den Seiten eines gegebenen, spitzwinkligen Dreiecks wähle man Punkte so, dass sie ein Dreieck mit minimalem Umfang bilden, Bild 26:

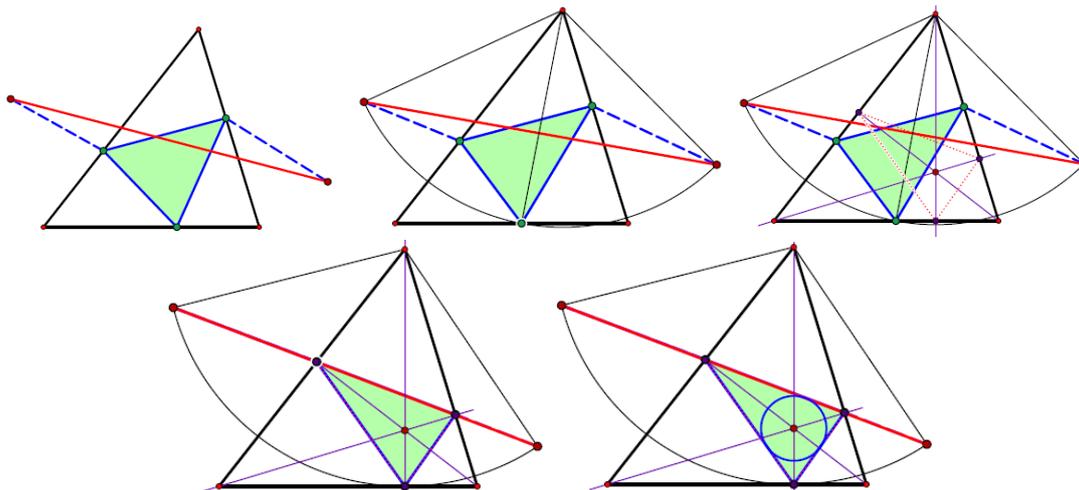


Bild 26: Umfang-minimales, einem Dreieck eingeschriebenes Dreieck. Skizzenfolge zur Argumentation mit Spiegelungen. Das Lösungsdreieck ist das Höhenfußpunkte-Dreieck des Ausgangsdreiecks, dessen Höhenschnittpunkt zugleich Inkreismitte des Lösungsdreiecks ist.

Das Spiegelungsargument führt auf gleichschenkelige Dreiecke, deren gleiche Schenkel festem Winkel bilden, (den doppelten des Ausgangsdreiecks). Dieses gleichschenklige Dreieck wird am kleinsten, wenn der auf der Basisseite gewählte Punkt in den Höhenfußpunkt fällt.

[Anmerkung: Es zeigt sich, dass das trivariate Problem, (die gesuchten Punkte können auf den Seiten des Ausgangsdreiecks unabhängig voneinander gewählt werden), eine einfache geometrische Lösung erlaubt. Wo ist nun die für die Lösung einer Extremwertaufgabe sicherlich unumgängliche Differentiation versteckt? Wir nehmen – zurecht – an, dass in der Anschauungsebene die kürzeste Verbindung zweier Punkte geradlinig ist, dass also diese Extremwertaufgabe bereits gelöst ist. Für andere Schauplätze, etwa eine gekrümmte Fläche, führt diese Aufgabe auf sogenannte geodätische Linien.]

Da für die Seiten des Fußpunktdreiecks gilt „Einfallswinkel = Ausfallswinkel“, liegt es nahe, „Billard-Bahnen“ im Ausgangsdreieck mit geschlossenen Bahnen zu untersuchen, Bild 27.

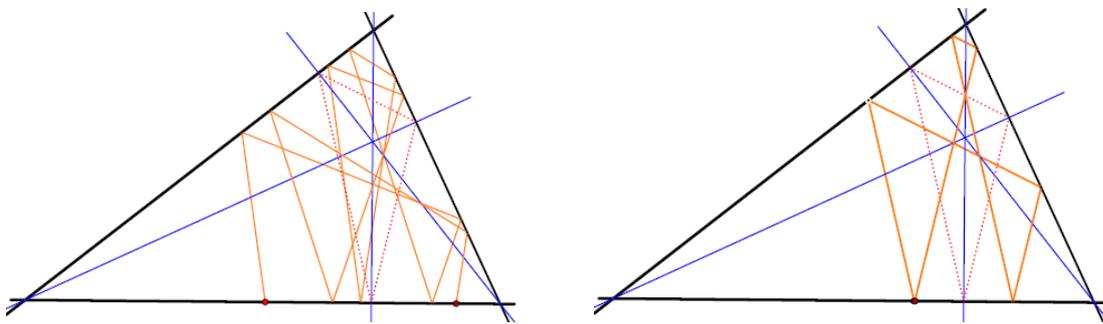


Bild 27: „Billard“ im Dreieck; nicht geschlossene Bahn (links); geschlossene Bahnen existieren für Bahnen parallel zu den Seiten des Fußpunktdreiecks (rechts).

Aufgaben mit Kreisen und Kreis-Vierecken

a) Der Satz von Miquel

Die vorangegangene Extremwertaufgabe verlangt die Wahl je eines Punktes auf den Seiten eines gegebenen Dreiecks. Damit ist dieses Dreieck in vier Teildreiecke zerlegt, deren Umkreise, aber auch andere „merkwürdige Elemente“, betrachtet werden können. Insbesondere für die Umkreise der drei „Außendreiecke“ stellt man fest, dass sie durch einen Punkt, den Miquel-Punkt M gehen, Bild 28 (links). Der elementargeometrische Beweis wird mittels des Peripheriewinkelsatzes geführt. (Es sei angemerkt, dass in Kreisgeometrien der „Satz von Miquel“ die Bedeutung eines Axioms hat und als „Miquel-Konfiguration“ formuliert wird.)

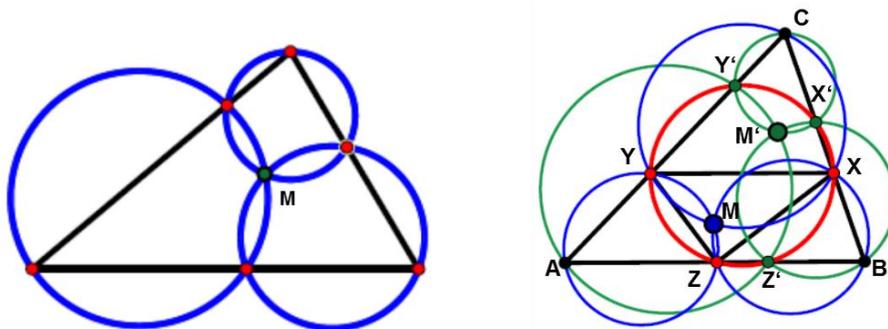


Bild 27: Satz von Miquel (links); Miquel-Abbildung (rechts)

Der Umkreis des „Inndreiecks“ XYZ (Bild 27 rechts) schneidet die Seiten des Angabedreiecks in Punkten X', Y', Z' , die ebenfalls einen Miquel-Punkt M' festlegen, sodass damit eine (involutorische) Abbildung $\mu: M \mapsto M'$ der Anschauungsebene auf sich erklärt ist.

b) Zwei-Kreise-Satz von H. Ebisui

Für zwei schneidende Kreise hat H. Ebisui (2011) folgende interessante Feststellung gemacht (siehe Bild 28 links):

Zwei-Kreise-Satz von H. Ebisui: Projiziert man einen der Schnittpunkte S, T der beiden gegebenen Kreise a, b aus den Kreismittelpunkten (mittels Halbgeraden) auf den jeweils anderen Kreis, so ergeben sich zwei Schnittpunkte P und Q , deren Verbindungsgerade die Kreise a, b in weiteren Punkten X und Y schneidet. Dabei gilt $[ST] \approx [XS] \approx [YS]$.

Zusätzlich gilt: S ist der Inkreismittelpunkt des Dreiecks PQT ; der Umkreis von PQT geht auch durch die Mitten A und B der Angabekreise, (Bild 28, Mitte und rechts).

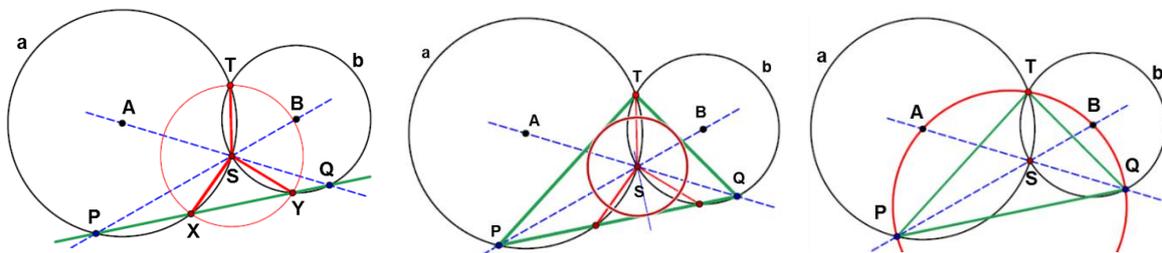


Bild 28: Zwei-Kreise-Satz von Ebisui (links) und eine Ergänzungen (Mitte und rechts)

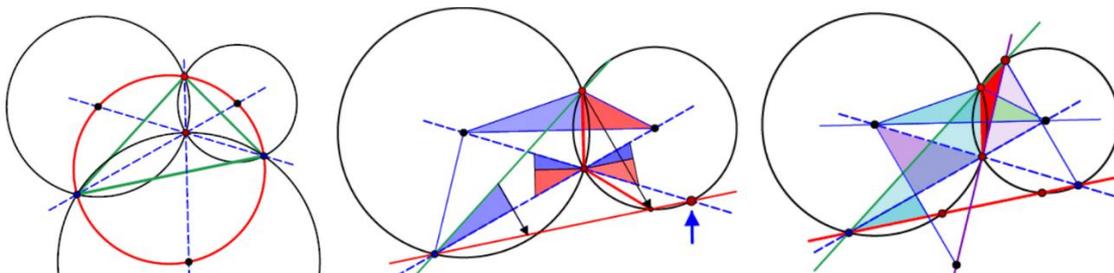


Bild 29: Zwei-Kreise-Satz von Ebisui, Andeutung eines Beweises mittels Peripheriewinkelsatz

Der (elementargeometrische) Beweis wird mit Spiegelungsargumenten und dem Peripheriewinkelsatz geführt, (siehe Bild 29).

c) Ein Inzidenz-Satz von H. Ebisui

H. Ebisui wendet die Idee des Projizierens auch auf eine andere Angabesituation an: Gegeben sind drei allgemein liegende Geraden r, s, t , und ein durch den Schnittpunkt $S := r \cap t$ gehender Kreis k , der r und t auch in A und B schneidet, siehe Bild 30 links.

Satz von H. Ebisui: Projiziert man die Dreieck-Eckpunkte $R = s \cap t, T = r \cap t$ aus A bzw. B auf k , und die Kreispunkte $C, D \in s \cap k$ ebenso auf t bzw. r , und werden die Bildpunkte mit R', T', C' und D' bezeichnet, dann gilt: Die Punkte S und $X = AR \cap BT$ und $Y := C'R' \cap D'T'$ sind kollinear.

Anmerkung: Da der Satz nur von Schnittpunkten und Verbindungsgeraden handelt, ist er von projektiv-geometrischer Natur und gilt deshalb auch in allen nicht-euklidischen Ebenen,

insbesondere also auch auf der Kugel (als Repräsentant der elliptischen Geometrie), wobei Großkreise die Rolle von Geraden übernehmen, Bild 30, rechts.

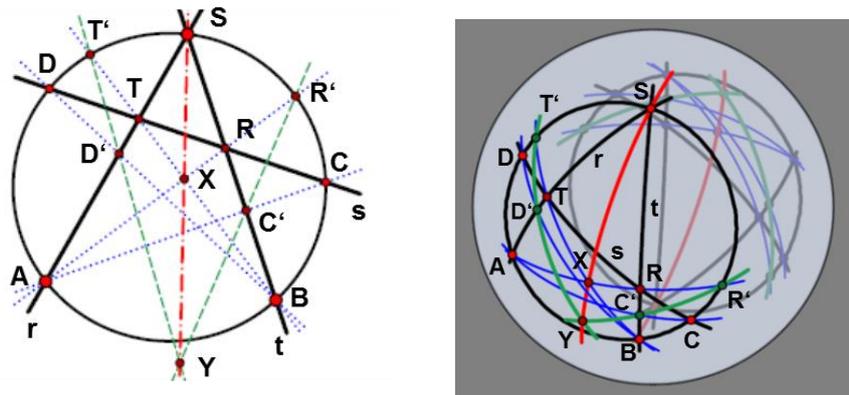


Bild 30: Ein Inzidenz-Satz von H. Ebisui in der Anschauungsebene (links) und auf der Kugel (rechts)

[*Bemerkung:* In der Kugeloberfläche liegende „Gerade“ sind als Bahnen beim „Geradeausfahren“ erklärbar, „Kreisbahnen“ werden mit festem Lenkleinschlag durchfahren. In dieser Geometrie gibt es keine Parallelen, also auch keinen Strahlensatz und keine Ähnlichkeiten! Dreiecke haben auch nicht einen gestreckten Winkel als Winkelsumme. Demgemäß ist die eingangs erstellte Liste von „Geboten“ für die Kugel neu zu fassen, damit auf ihr Elementargeometrie getrieben werden kann. Die dynamische Grafik-Software Cinderella erlaubt das Konstruieren sowohl auf der Kugel (und in der elliptischen Ebene) als auch in der hyperbolischen Ebene. Es ist für ein tieferes Verständnis der euklidischen Geometrie sehr nützlich, wenn elementargeometrische Sachverhalte auch in nichteuklidischen Schauplätzen betrachtet werden.]

d) Der Schmetterlingssatz für Kreisvierecke

Anmerkung: In der Elementargeometrie versteht man unter einem „Vieleck“ ein geschlossenes Polygon aus n Eckpunkten und n Seiten(strecken). Von Seiten verschiedene Verbindungsstrecken von Ecken heißen Diagonalen. Erst durch eine Reihenfolge der Eckpunkte werden Seiten und Diagonalen unterscheidbar. Es ist gelegentlich zweckmäßig, auf diese Unterscheidung zu verzichten. So bestimmen z.B. vier allgemein liegende, nicht geordnete Punkte sechs Verbindungsgeraden, die zu drei Paaren zusammengefasst werden können. Eine solche Figur wird „vollständiges Viereck“ genannt. Analog bestimmen vier allgemein liegende Geraden drei Paare von Schnittpunkten und diese Gesamtfigur heißt „vollständiges Vierseit“.

Im Folgenden werden „Kreisvierecke“ betrachtet, also Vierecke, deren Ecken auf einem Kreis liegen. Für solche Vierecke gilt der

„Schmetterlingssatz“: *Seien 1,2,3,4 die Ecken eines „überschlagenen“ Kreisvierecks, wobei sich die Seiten 14 und 23 in einem vom Mittelpunkt M des Umkreises k verschiedenen Innenpunkt S schneiden (Bild 31, links). Die zu MS normale Gerade schneidet die Seiten 12 und 34 in Punkten X und Y , wobei gilt: S ist Mittelpunkt der Strecke $[XY]$.*

Der (elementargeometrische) Beweis benützt den Peripheriewinkelsatz und den Potenzsatz. Erstaunlicherweise gilt der Schmetterlingssatz auch in der hyperbolischen und elliptischen Ebene, also auch auf der Kugel, (Bild 31, rechts). Durch Projektion der sphärischen Figur aus

der Kugelmitte auf die Ebene des Kugel-Kleinkreises k führt man den sphärischen Fall auf den ebenen zurück.)

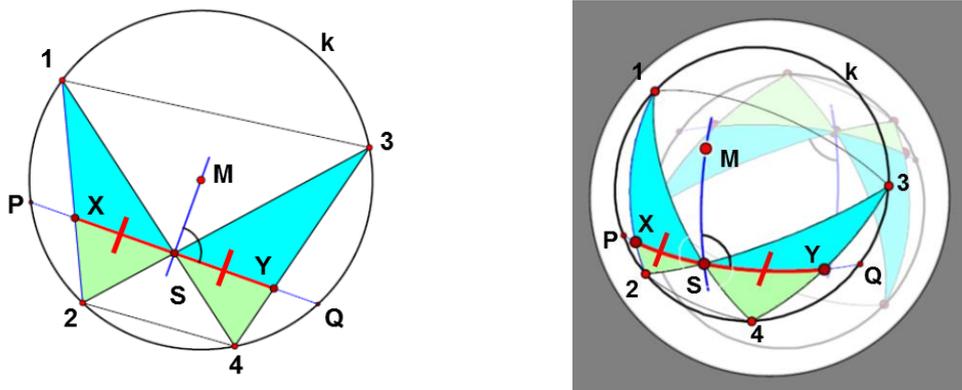


Bild 31: Der Schmetterlingssatz gilt in der Anschauungsebene (links) und der Kugel (rechts)

e) Der M-Höhensatz für Kreisvierecke

Für ein Dreieck sind die Höhengeraden als die durch die Ecken gehenden, zur Gegenseite normalen Geraden erklärt. Für n -Ecke und Polyeder kann dies auf folgende Weise verallgemeinert werden: Die zu einer Seitengerade (Kantengerade) normale „Kantenhöhe“ enthält den Schwerpunkt der übrigen Ecken. Diese Erklärung ist dimensions-unabhängig. Für ein (vollständiges) Viereck gehen die insgesamt sechs Höhengeraden also durch den Mittelpunkt der jeweiligen Gegenseite und werden daher als „M-Höhen“ („Maltitudes“) bezeichnet. Dabei gilt der

„M-Höhensatz für Kreisvierecke“: Sowohl in der Anschauungsebene also auch auf der Kugel sind die sechs M-Höhen eines vollständigen Kreisvierecks kopunktal, (Bild 32).

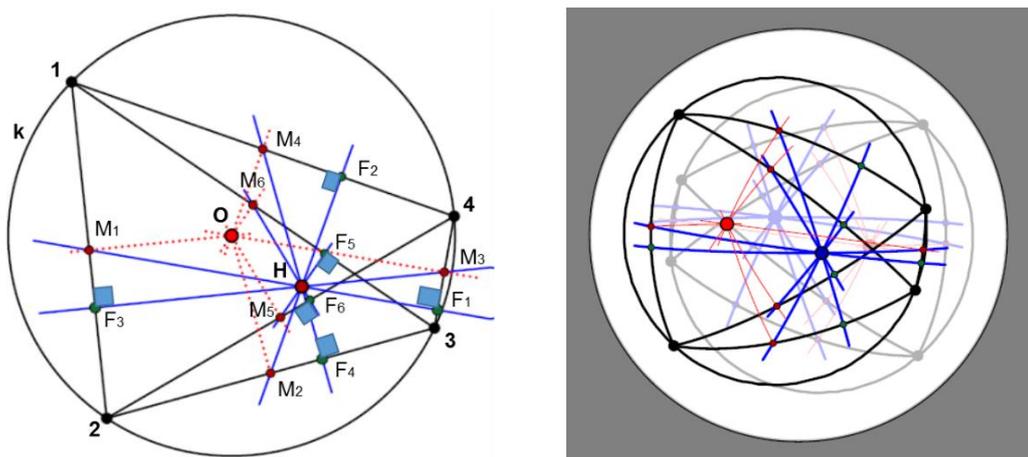


Bild 32: Die M-Höhen eines Kreisvierecks in der Anschauungsebene (links) und auf der Kugel (rechts)

Auch hier kann der sphärische Fall durch Zentralprojektion aus der Kugelmitte auf die Ebene des Umkreises des vollständigen Vierecks auf den ebenen Fall zurückgeführt werden. Erstaunlicherweise gilt der M-Höhensatz aber in der hyperbolischen Ebene nicht! Es ist naheliegend, die gegenseitige Lage der M-Höhen nun auch für Tetraeders zu untersuchen.

Aufgaben über Vierseite

a) Der Satz von Miquel-Steiner

Betrachten wir erneut die Figur zum Satz von Miquel (Bild 27 links). Wenn man die frei auf den Dreiecksseitengeraden wählbaren Punkte so annimmt, dass sie kollinear auf einer vierten Geraden liegen, dann entsteht ein *vollständiges Vierseit* bestehend aus vier Geraden und drei Punktepaaren, Bild 32.

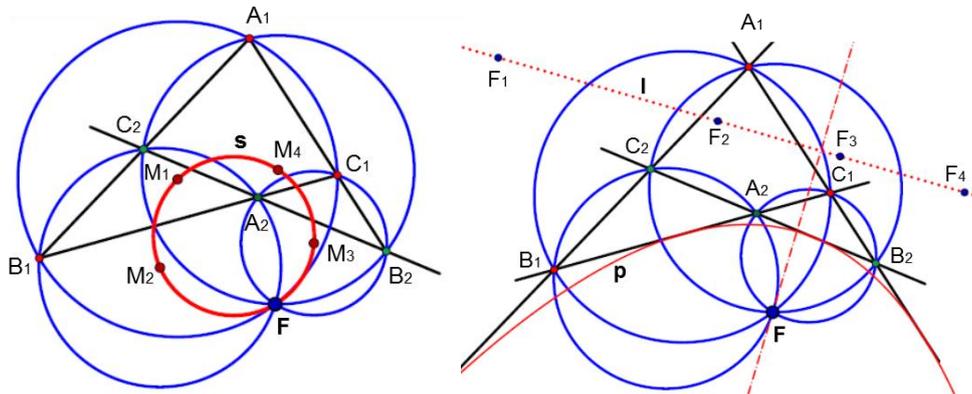


Bild 32: Vollständiges Vierseit mit Miquel-Kreisen und Steiner-Kreis (links);
die das Vierseit berührende Parabel (rechts)

Satz von Miquel-Steiner: *Die Umkreise der vier Teildreiecke eines vollständigen Vierseits gehen durch einen Punkt, den Miquel-Punkt F des Vierseits, Die Umkreismitten und F liegen auf einem Kreis, dem Steiner-Kreis s des Vierseits, (siehe Bild 32, links). Spiegelt man F an den Seiten des Vierecks, so erhält man vier kollineare Punkte, deren Verbindungsgerade l und der Punkt F sind Leitgerade und Brennpunkt der das Vierseit berührenden, eindeutig bestimmten Parabel, (siehe Bild 32, rechts).*

Erstaunlicherweise gilt für die gegenseitige Lage der Steiner-Kreise der fünf Teilvierseite eines Fünfeits die folgende von S. Kantor (1878) Erweiterung obigen Satzes: *Die Mittelpunkte der 5 Steiner-Kreise eines Fünfeits liegen auf einem Kreis, dem Kantor-Kreis des Fünfeits.* Ebensoles gilt für die Mitten der sechs Kantor-Kreise eines Sechseits, u.s.w. Man beachte, dass diese Erweiterungen durch Hirano, Hsu und Morley bis hin zu n -Seiten lange vor den elektronischen Grafik-Hilfsmitteln entdeckt wurden!

b) Der Satz von Gauß und Bodenmiller

In Fortführung der Untersuchungen am vollständigen Vierseit soll noch erwähnt werden, dass die Höhenschnittpunkte seiner vier Teildreiecke gleichfalls auf der die Spiegelbilder von F verbindenden Geraden l liegen. (Bild 33, links). Es gilt der

Satz von Gauß: *Die Mittelpunkte der drei Diagonalstrecken eines vollständigen Vierseits sind kollinear. Ihre Verbindungsgerade heißt Gauß-Gerade und ist normal zur Verbindungsgeraden l der Höhenschnittpunkte der vier Teildreiecke des Vierseits.*

Auch hier gilt eine Ergänzung, nämlich der

Satz von Bodenmiller: *Die Thales-Kreise über den drei Diagonalstrecken eines vollständigen Vierseits gehören einem Büschel von Kreisen an. Das den Kreisen gemeinsame Punktepaar (im algebraischen*

Schlussbemerkung:

Die kleine Auswahl an eben-elementargeometrischen Sätzen soll zeigen, dass sich in freier Assoziation aus wenigen Grundelementen „durch Spielen mit selbst erfundenen Regeln“ und konsequentes Kombinieren ganz zwanglos eine Vielzahl an merkwürdigen Eigenschaften und Zusammenhängen ergibt. Viele dieser Resultate finden sich zwar in einschlägiger Literatur und (etwa Wikipedia), manche Sachverhalte erscheinen, mit projektiv-geometrischen Mitteln erklärt, weitgehend trivial. Dennoch sollten sich Schüler sehr darüber freuen, wenn sie ein Resultat eigenständig finden, mit dem sich etwa schon Gauß auseinandergesetzt hat.

Mit den Möglichkeiten von dynamischer Grafik-Software sind dem jugendlichen Forschergeist (und dem sinnvollen Ausleben des Spieltriebs) kaum Grenzen gesetzt. Ergibt sich eine besondere Inzidenz am Bildschirm und verbleibt eine solche bei Variation der Angabe und bei Zoomen der Figur, so ist die Gültigkeit eines diese Inzidenz betreffenden Satzes zwar weitgehend evident, aber nicht begründet. Sie könnte auch eine Folge von Rundungsoperationen der im Hintergrund ablaufenden Numerik sein.

Während also der Mathematik-Unterricht (mit geringen Ausnahmen) im Wesentlichen auf Kalkül-Sicherheit und zweckmäßigen Problem-Ansatz zielt, könnte mittels Geometrie das „Beweisbedürfnis“ geweckt und geschult werden. Hiermit wird, nach meiner Meinung, das Wesen der Mathematik für den Heranwachsenden nämlich eher sichtbar, als bei bloß angewandt-mathematischen Aufgaben.

Natürlich sollte sich nun „Elementargeometrie im Anschauungsraum“ mit den zusätzlichen Grundelementen „Kugeln“ und „Ebenen“ anschließen. Auch dazu gibt es (meist alte) Literatur. Aktuell und für die Schule geeignet ist das kürzlich erschienene Buch „Elementare Tetraedergeometrie – Eine Einführung in die Raumgeometrie“ von H. Schumann (2011). Wie die Dreiecksgeometrie, für die es einen mittlerweile auf über 5000 merkwürdige Punkte angewachsenen Katalog „Encyclopedia of triangle centres“ von C. Kimberling, gibt es auch für das Tetraeder eine riesige Menge von Resultaten. Für die Schule relevant sind davon vielleicht Vorstellungsübungen zum System der Schwerpunkte (Volumen-, Flächen-, Kanten-, Ecken-schwerpunkt), zum i.A. nicht existierenden Höhenschnitt-punkt, die Diskussion von Berührungskugeln, (von denen es bis zu 8 (!) gibt), und zu besonderen Tetraedern (orthozentrische, gleichflächige, das reguläre Tetraeder). Für den Umgang mit Kugeln mag vielleicht der Thales-Satz und seine 3D-Verallgemeinerungen ein brauchbares Themenfeld sein; (Thales-Kugeln werden bei der Rekonstruktion der Raumsituation aus einem Foto verwendet, wenn das Bild eines orthogonalen Dreibeins erkennbar ist und die Fluchtpunkte der Dreibeingeraden bestimmt werden können.). Natürlich ist auch die Geometrie auf der Kugel, als Repräsentant einer nicht-euklidischen Geometrie, in der weder Thales-Satz noch Peripheriewinkelsatz gelten und es keine Ähnlichkeiten, sondern nur Kongruenzen gibt, ein wesentliches, allerdings nur zweidimensionales Thema.

In meinen Seminaren für Lehrerstudenten, die meist keinerlei geometrische Vorbildung hatten, haben Studenten zum Einstieg Kurzreferate zu elementargeometrischen Sachverhalten gehalten und sich dabei sehr für Geometrie begeistern lassen. Solche Kurzreferate sind sicher auch in der Schule möglich und würden auch die Sprachkompetenz fördern.

Noch etwas: Es ist keine Schande, wenn der/die Unterrichtende einen Beweis zu einem von den Schülern gefundenen Sachverhalt nicht zusammenbringt!

Zahlen in der Geometrie - mit Strecken und Punkten rechnen, von der Proportion zum Koordinatenbegriff, Skalen und diskrete Gruppen

a) Mit Punkten und Strecken rechnen, Koordinaten

Wir bleiben bei der Anschauungsebene bzw. dem Anschauungsraum als Schauplatz. Schon in der Grundschule wird das Addieren/Subtrahieren von ganzen und rationalen Zahlen auch durch das Addieren von orientierten Strecken auf einer (orientierten) Geraden g visualisiert. Von den „10 Geboten“ aus dem vorigen Abschnitt ist dabei die Kongruenz von Strecken bei Parallelverschiebung relevant, (Bild 35, links). Dabei ist die Kommutativität und Assoziativität der Streckenaddition unschwer nachzuweisen. Neutrales Element ist die „Nullstrecke“, also eine Strecke, bei der Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. Das Inverse zu einer Strecke $[AB]$ ist die Strecke $[BA]$. Da jede orientierte Strecke auf g eine Translation repräsentiert, ist damit auch geklärt, dass die Translationen parallel zu g eine zur additiven Gruppe (reeller) Zahlen iso-morphe Gruppe bilden. (Es sei angemerkt, dass der zugrundeliegende Zahlbereich in der Anschauungsebene (als Modell für eine Zahlenstruktur) nicht unmittelbar ersichtlich ist! Hierin liegt ein bei der Einführung von Koordinaten ein nicht zu vernachlässigendes Problem.)

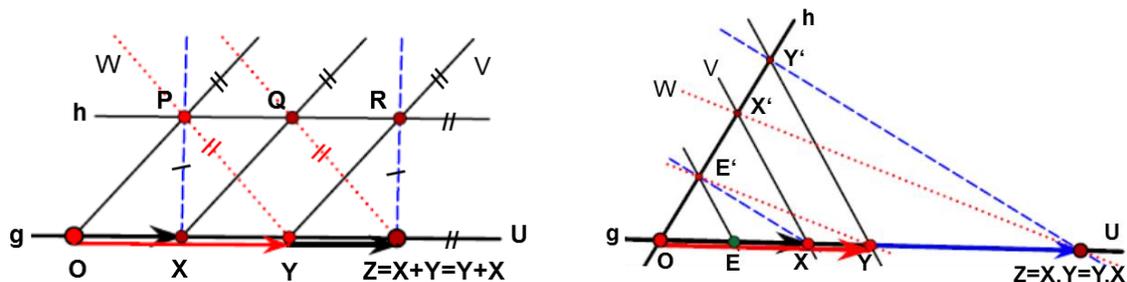


Bild 35: Strecken-Addition auf g mittels Translationen unter Benützung einer zu g parallelen Hilfsgeraden h , (links); Strecken-Multiplikation mittels Streckungen aus dem „Nullpunkt“ und gegebener Einheitsstrecke $[OE]$ unter Benützung des Strahlensatzes (rechts).

Auch die Multiplikation/Division von Zahlen kann im Strecken-Modell visualisiert werden, Bild 35, rechts): Hier benötigt man allerdings zusätzlich die Angabe einer „Einheitsstrecke“ $[OE]$. Damit ist nun jedem Punkt X von g auch eine „Koordinate“ x als Zahlenwert zugeordnet, nämlich der Wert der (mit Vorzeichen versehenen) Proportion $[OX]:[OE]$, also das „Teilverhältnis“ der drei geordneten kollinearen Punkte O, E, X . Andererseits kann x als Streckfaktor für jene Streckung σ_x (= Dilatation) aufgefasst werden, die O als Zentrum hat und E in X überführt. Das Produkt der Koordinaten x, y zweier Punkte X und Y wird also durch Zusammensetzung der Streckungen $\sigma_x \circ \sigma_y = \sigma_{x \cdot y}$ modelliert. In der Anschauungsebene wird die Zusammensetzung der Streckungen mittels des Strahlensatzes bewerkstelligt. Dabei ist die Kommutativität der Multiplikation zwar erfüllt, aber, so wie der zugrundeliegende Koordinatenbereich, keineswegs offensichtlich!

[Anmerkung: In der Projektiven Geometrie wird der Zusammenhang zwischen Eigenschaften des Koordinatenbereichs mit den geometrischen Schließungssätzen von **Desargues** und **Pappus** (Bild 36) hergestellt. Damit als Koordinatenbereich der Körper der reellen Zahlen entsteht, sind die Axiome des Euklid noch wesentlich zu ergänzen. Die erste Vervollständigung des Axiomensystems dazu stammt von D. Hilbert.]

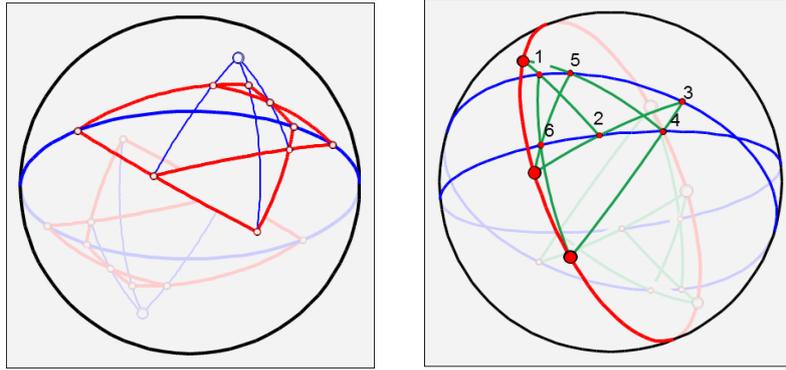


Bild 36: Die Schließungssätze von Desargues (links) und Pappus (rechts) gelten auch auf der Kugel.

Mittels der oben erklärten Streckungen lassen sich auch die übrigen für eine Gruppe nötigen Regeln (Assoziativität der Multiplikation, Existenz einer „neutralen Streckung“ (=Identität), Inverses einer Streckung) visualisieren. Auch das die additive und multiplikative Gruppe verknüpfende Distributivgesetz ist in der Anschauungsebene gültig, sodass für sie als Koordinatenbereich nur ein *kommutativer Körper* in Frage kommen kann.

b) Skalen und Gitter

Eine „Messskala“ entsteht durch n-maliges Addieren einer fest gewählten Einheitsstrecke [OE]. Geht man nach dem Muster von Bild 35, links vor, entsteht eine „Sägezahn-Figur“, (Bild 37, links). Diese lässt sich zu einem Flächengitter fortsetzen, aber auch - als Inzidenzfigur in der projektiv abgeschlossenen Anschauungsebene (als Bildebene der Perspektive) gedeutet - zur Konstruktion von Perspektivbildern solcher Netze verwenden, (Bild 37, rechts). Mit letzterem wird ebenfalls die durch ein Element erzeugte diskrete additive Gruppe visualisiert, aber diese Visualisierung passt nun nicht mehr zur klassischen Erzeugung der additiven Gruppe durch Translationen in der Anschauungsebene. Neugierige werden sich die Frage stellen, wie sich solche Skalen und Netze auf der Kugel darstellen.

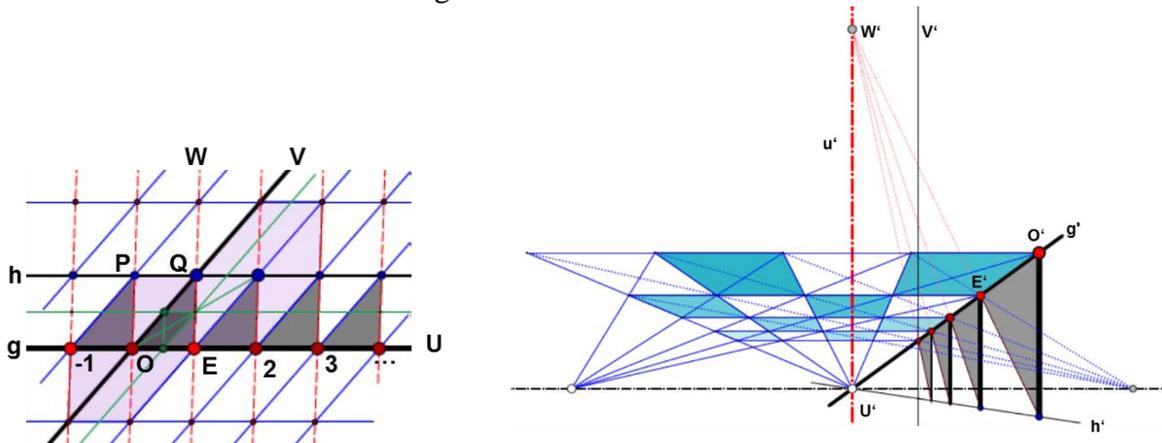


Bild 37: „Sägezahnmethode“ zur Konstruktion von Skalen und Netzen, Translationsnetze (links) und ihr perspektives Bild (rechts)

Es ist naheliegend, wie die Skalen bzw. Netze (durch fortgesetztes Halbieren) verfeinert werden können. Für die Freihand-Übertragung von ebenen Figuren in ein Perspektivbild ist es oft zweckmäßig, eine solche Verfeinerung nur „lokal“ durchzuführen.

c) Kartesische Koordinaten, Polarkoordinaten und das Problem mit π

Wir haben in der Elementargeometrie rechte Winkel und Spiegelungen zur Verfügung und können damit Quadrate erklären. Ein Netz aus Quadraten der Anschauungsebene ist demgemäß durch zwei orthogonale Skalen mit gemeinsamem Nullpunkt und gleichen Einheitsstrecken erklärt und eine solche Angabe heißt bekanntlich „kartesisches Koordinatensystem“. Man beachte dabei, dass durch die oben erklärte Skalen-Verfeinerung bloß die Potenzen von $\frac{1}{2}$ erfasst werden (siehe Tschirnhaus!) und rationale Strecken-Proportionen nur mittels Strahlensatz bestimmt werden können. Auf der Kugel (und in der hyperbolischen Ebene) ist beispielsweise das Strecken-Dritteln so wie das Winkeldreiteilen bereits eine kubische Aufgabe! Quadratwurzelzahlen sind als Strecken-Proportionen mittels Zirkel und Lineal „exakt“ bestimmbar. Für andere reelle Zahlen hat die Geometrie gelegentlich Näherungskonstruktionen bereit.

Geht man von einer Skala auf der Halbgeraden OU und der Schar konzentrischer Kreise mit Mitte O und Radien $r.[OE]$ aus, so wird ein Polarkoordinatennetz dadurch festgelegt, dass man den Winkel zwischen den orthogonalen Halbgeraden g und h fortgesetzt halbiert, (Bild 38, links). Die Vervollständigung des Netzes in den übrigen Quadranten kann dann durch Addition von rechten Winkeln erfolgen. Man beachte dass die Zerlegung des rechten Winkels in 2^k Teile ebenso willkürlich ist, wie die Angabe der Einheitsstrecke $[OE]$. Außerdem lässt fortgesetztes Winkelhalbieren wiederum nicht alle Punkte der Anschauungsebene exakt erfassen!

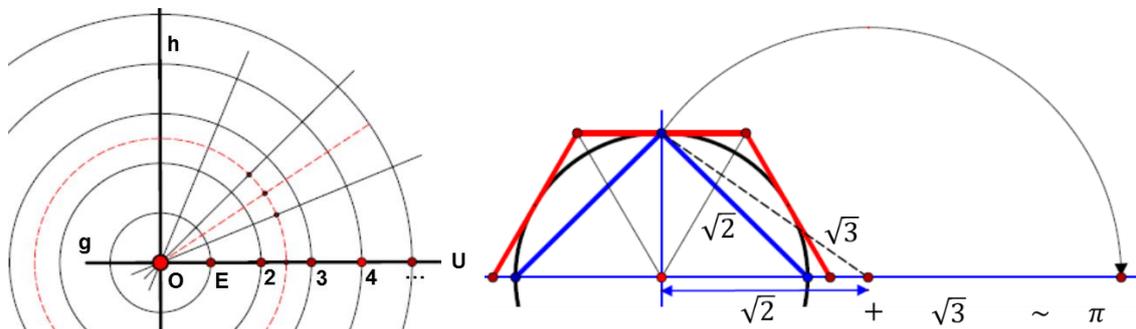


Bild 38: Polarkoordinatennetz (links), Näherungskonstruktion von π (rechts)

Seit alters her wird die Winkelskala über ein „Winkelmaß-Konvention“ so definiert, dass der rechte Winkel in 90 „Grade“ genannte Einheiten zerlegt wird, wobei noch bekanntermaßen eine Verfeinerung in Minuten und Sekunden erfolgt. (In dieser Einteilung ist noch, wie beim Zeitmaß, das ursprüngliche, hexagesimale Zahlensystem sichtbar.) Obwohl für den Begriff der Polarkoordinaten die in der g -Skala gemessene Länge eines Kreisbogens nicht relevant ist, hat sich die Menschheit mit dem Problem der Bestimmung der Bogenlänge eines Kreises, also der Proportion *Kreisumfang* : *Durchmesser*, intensiv auseinandergesetzt und eine große Zahl mehr oder weniger gute Approximations-Konstruktionen erfunden; vgl. z.B. die Konstruktion von Kochanski, die den Wert von $\pi = 3,1415926\dots$ mit Zirkel und Lineal durch $3,1415333\dots$ (theoretisch) annähert. Der Nachweis, dass π eine transzendente reelle Zahl ist und nicht durch Zirkel und Lineal, aber auch nicht durch eine algebraische Gleichung bestimmt werden kann, gelang erst im 19. Jahrhundert durch Lindemann.

Eine „plausiblere“ Konstruktion addiert $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$: Umschreibt man nämlich einem Kreis ein reguläres Sechseck und schreibt ihm ein Quadrat ein, (Bild 38 rechts), so muss der Kreisumfang einen Mittelwert zwischen den Umfängen dieser beiden Polygone haben. Unter allen regulären Polygonen mit niedriger Eckenzahl erweisen sich genau das Sechseck und das Quadrat mit dem arithmetischen Mittel als Mittelwert, die dann auf die oben erwähnte Addition von Wurzelwerten führt, als gut brauchbare Näherung. (Der Nachweis ist eine einfache Schulaufgabe.)

[Anmerkung: Auf der Kugel sind kartesische Koordinatennetze nicht möglich, wohl aber Polarkoordinatennetze, wobei die modifizierte Form der *geographischen Längen- und Breitenangabe* üblich ist. Man beachte, dass dabei im Gegensatz zu den Polarkoordinaten in der Anschauungsebene die Gesamtlänge der Radialstrahlen endlich ist! Hier sei auch auf den Zusammenhang mit sogenannten *Kartenentwürfen*, also ebenen Darstellungen der Erd-Sphäre, hingewiesen.]

d) Diskrete Gruppen von Kongruenzen und Ähnlichkeiten

Wir haben bisher den Kongruenzbegriff naiv verwendet und als „Invarianz-Eigenschaft“ von Strecken bei Translationen, Rotationen und Spiegelungen in der Anschauungsebene erklärt, (siehe die „10 Gebote“ im Einführungskapitel zur Elementargeometrie). Zwei Strecken heißen also genau dann kongruent, wenn sie durch Translation τ oder Rotation ρ oder Spiegelung σ zur Deckung gebracht werden können. Damit ist zunächst der SSS-Kongruenzsatz für Dreiecke und mit diesem auch die übrigen Kongruenzsätze formulierbar. Ferner folgt, dass für kongruente Dreiecke die Identifikation der Seiten durch ein und dieselben Elementarabbildungen τ, ρ, σ hergestellt werden kann, dass sich also jede Kongruenz als Produkt dieser Abbildungen ergibt. Da wir schon bemerkt haben, dass eine Translation bzw. Rotation Produkt von zwei Spiegelungen ist, ist jede Kongruenz durch endlich viele (nämlich höchstens 3) Spiegelungen erzeugbar. Es gilt dabei der

Satz über Kongruenzen: *Jede Kongruenz ist entweder eine Schiebung oder Drehung oder Spiegelung oder Gleitspiegelung (= Produkt aus Schiebung und Spiegelung) oder die Identität. Man unterscheidet diese Elementarkongruenzen durch ihre Fixpunkt- und Fixgeradenmengen, vgl. Tabelle 1.*

	Translation	Rotation	Spiegelung	Gleitspiegelung	Identität
Fixpunktmenge	{ }	Drehzentrum Z	Spiegelachse a	{ }	alle Punkte
Fixgeradenmenge	Parallelenbündel	{ } oder insb. Bündel um Z	Gerade a und \parallel -Bündel $\perp a$	Gleitspiegelachse a	alle Geraden
Sinn	gleichsinnig	gleichsinnig	gegensinnig	gegensinnig	gleichsinnig
Erzeugt durch s Spiegelungen	$s=2$	$s=2$	$s=1$	$s=3$	$s=2$
an Spiegelachsen	parallel	schneidend, insbesondere \perp	a	a und zwei zu a \perp Achsen	a beliebig
#(erzeugte Gruppe)	∞	∞ oder endlich		∞	1

Tabelle 1: Klassifikation der Elementarkongruenzen

Anwendungsbeispiele der durch eine Translation τ erzeugten Gruppe sind sogenannte Frieze \mathcal{F} . Dabei wird eine Grundfigur F den Schiebungen $\{\tau^k, k \in \mathbb{Z}\}$ unterworfen. Besitzt F Symmetrieeigenschaften, so genügt dann ein „Fundamentalbereich“ genannter Teil von F (zusammen mit diesen Spiegelungen) zur Erzeugung des Frieses. Zur Klassifikation der Frieze geht man nach dem in Tabelle 2 dargelegten „Bestimmungsschlüssel“ vor: Zuerst erfolgt der Test, ob das Fries (oder die Grundfigur) Halbdrehungen gestattet, ob es also *Digyre* genannte Drehzentren gibt. Die weiteren Schritte testen auf die Existenz von Spiegelachsen. Die einfachsten Beispiele aller möglichen Fries-Klassen können schon mit Buchstaben- oder Zeichenfolgen erzeugt werden.

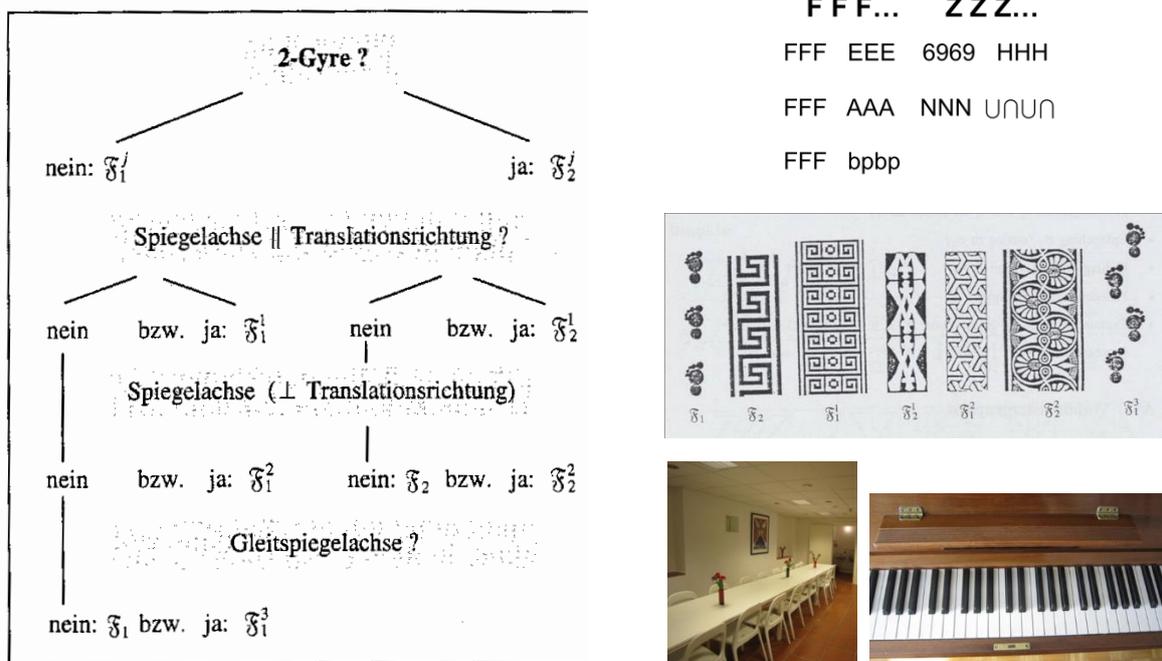


Tabelle 2: Bestimmungsschlüssel für Fries-Klassen und einfache Beispiele

Erzeugt eine Rotation q und ihre Potenzen eine endliche Gruppe mit $q^k = id, k \in \mathbb{Z}$, so wird aus einer Grundfigur F eine „Rosette“ und F kann höchstens noch die Spiegelung an einer durch das Drehzentrum Z , einen k -Gyr, gehende Achse erlauben, sodass es nur zwei Klassen von Rosetten gibt.

Zwei Translationen mit verschiedenen Fixgeradenbüscheln erzeugen eine zweiparametrische diskrete Gruppe. Eine dieser Gruppe unterworfenen Grundfigur erzeugt ein „Wandmuster“. Auch für diese Wandmuster gibt es eine Klassifikation und diese unterscheidet 17 verschiedene Grundtypen. (Dieses umfangreiche Stoffgebiet, das zu regulären Pflasterungen führt, muss bei diesem Seminar unberücksichtigt bleiben.)

[Anmerkung: Als schulrelevante Aufgaben ergeben sich u.a. die Konstruktionen der Fixelemente von durch ein Halbgeradenpaar und den Sinn gegebenen Kongruenzen. Die Klassifikation von Friesen kann etwa an Teppichrändern (und damit das bewusste Schauen) geübt werden. Auch der künstlerisch-kreative Aspekt von Friesen, Rosetten und Wandmustern ist dabei bedeutsam; historische Beispiele machen deutlich, dass erst die künstlerisch gestalteten Ornamente zur mathematisch motivierten Reflexion darüber und dem Gruppenbegriff geführt haben. Außerdem mag sich die Frage stellen, ob es auch nichtreguläre Pflasterungen gibt. Der Lehrer wird hier vielleicht auf Voderberg- und Penrose-Pflasterungen und Wikipedia verweisen.]

Was kann von dem oben Stehenden auf die Kugeloberfläche übertragen werden? Z.B. kann ein Fries um den Äquator gewickelt werden, wobei u.U. eine endliche Menge von Grundfiguren entsteht, (Bild 39, links). Durch geeignete Schrittweiten können dabei als Gitterpunkte sogar Ecken der platonischen Körper erzeugt werden. Durch Projektion der Polyeder-Facetten aus dem Mittelpunkt auf die Kugeloberfläche entstehen „Pflastersteine“, deren Ränder noch modifiziert werden können. In Bild 39 rechts werden sphärische Analoga zur „Koch-Kurve“, einem Fraktal, als Ränder der Pflastersteine angedeutet. *Man beachte, dass auf der Sphäre nicht von Selbstähnlichkeit der Fraktale gesprochen werden kann!*

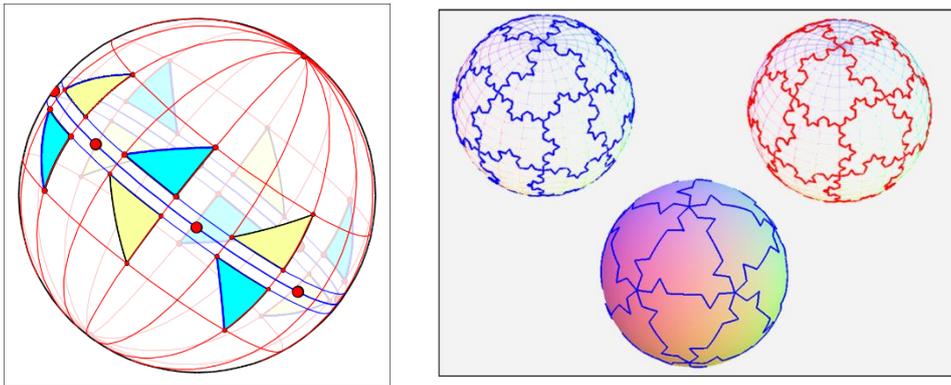


Bild 39: endlicher Fries auf der Kugel (links), Pflasterung der Kugel mit fraktal-berandeten Pflastersteinen (rechts)

[Anmerkung: Der Begriff „Fraktal“ gehört mittlerweile zum Allgemeinwissen und sollte Schülern nicht vorenthalten bleiben, zumal Fraktale, etwa als Baustein-Bäumchen, einfache Programmieraufgaben für den Informatik-Unterricht bieten. Auch bei diesem Stoffgebiet muss hier die bloße Andeutung genügen.]

Um den Begriff der „Ähnlichkeit“ zu erklären, geht man zunächst von zwei gegebenen Dreiecken ABC und $A'B'C'$ aus, deren homologe Seiten-Strecken dieselbe Proportion bestimmen. Durch Translation, Drehung und eventuell Spiegelung kann damit $A'B'C'$ in „Strahlensatzlage“ $A''B''C''$ bzgl. ABC gebracht werden, etwa mit $A = A'', B'' \in AB, C'' \in AC$. Die Streckung oder Dilatation $\delta: B \mapsto B''$ (vgl. Bild 35 rechts) ist damit die für die Identifikation von ABC mit $A'B'C'$ nötige zusätzliche Abbildung. Jede Ähnlichkeit ist also sicher winkeltreu, Streckenlängen werden mit festem Streckfaktor multipliziert. Ähnlichkeiten mit dem Streckfaktor ± 1 sind Kongruenzen. Zur Festlegung einer Ähnlichkeit genügt die Angabe von zugeordneten (orientierten) Strecken plus der „Sinn“, (also die Zuordnung der Ufer der die Strecken tragenden Geraden.). Es gilt der

Satz über Ähnlichkeiten: *Jede von einer Kongruenz verschiedene Ähnlichkeit besitzt einen Fixpunkt Z , das Ähnlichkeitszentrum. Jede gleichsinnige Ähnlichkeit ist entweder eine Dilatation (mit einem Fixgeradenbüschel um Z) oder eine „Spiralung“ (=Drehstreckung ohne Fixgeraden). Gegensinnige Ähnlichkeiten sind durch genau zwei orthogonale Fixgeraden durch Z gekennzeichnet.*

Der Beweis dieser Aussage ist im Fall einer gleichsinnigen Ähnlichkeit mittels des Peripheriewinkelsatzes zu erbringen und deshalb eine schulrelevante Aufgabe, (Bild 40, links). Für den diffizileren Fall einer gegensinnigen Ähnlichkeit überlegt man zuerst, dass die Fixgeraden parallel zu den Winkelhalbierenden der Angabe-Geraden sein müssen. Teilt man z.B. die Strecke $[AA']$ im Verhältnis $[AB]:[A'B']$, so enthält der Apollonius-Kreis a über den

Teilungspunktepaar T_1, T_2 notwendig den Fixpunkt Z der Ähnlichkeit, aus dem die Strecken $[AB]$ und $[A'B']$ unter gleichen Winkeln gesehen werden, (Bild 40, rechts). Die analoge Konstruktion auf die Strecke $[BB']$ angewendet liefert ein weiteres Paar von Teilungspunkten. Die Fixgeraden der Ähnlichkeit sind dann die Verbindungen der jeweils inneren bzw. äußeren Teilungspunkte, sodass Z allein mit dem Lineal bestimmt werden kann.

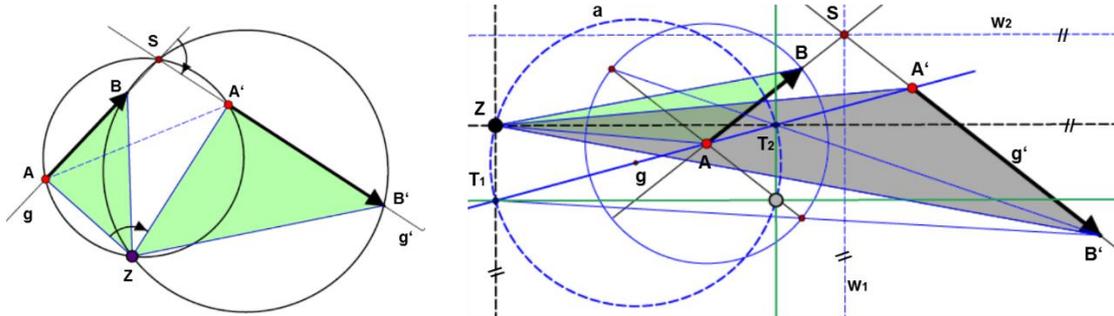


Bild 40: Konstruktion des Ähnlichkeitszentrums einer gleichsinnigen Ähnlichkeit (links) bzw. einer gegensinnigen Ähnlichkeit (rechts).

[Anmerkung: Falls speziell eine gegensinnige Kongruenz vorliegt, die Strecken $[AB]$ und $[A'B']$ also kongruent sind, so liegt eine Gleitspiegelung vor, deren Achse nach Obigem durch die Mitten der Strecken $[AA']$ und $[BB']$ geht. Ein Paläontologe könnte also aus zwei Fußabdrücken eines Sauriers auf dessen Bewegungsrichtung und Schrittweite (und damit auch auf dessen ungefähre Größe) schließen...]

Neben Visualisierungen von einparametrischen Spiralgruppen, (die auch mit *Phyllotaxis* zu tun haben, Bild 41), sind auch Zerlegungen der Anschauungsebene in selbstähnliche Pflastersteine, sogenannte „Reptiles“, interessant, (Bild 42). Auch bei diesen Themenkreisen muss es hier bei der bloßen Erwähnung bleiben.

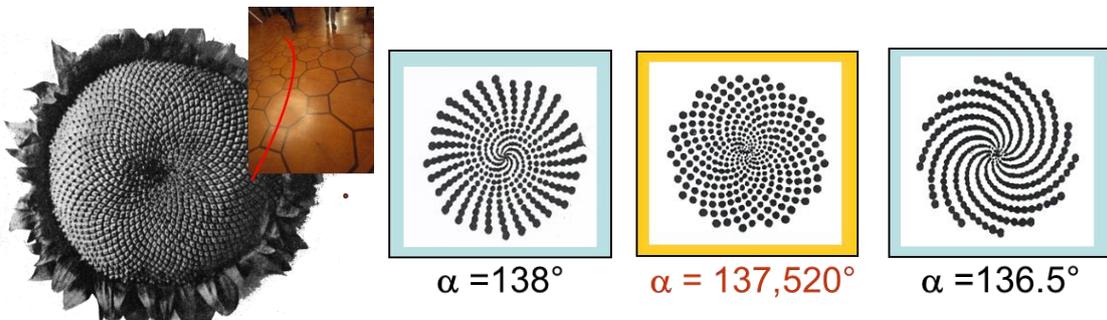


Bild 41: Visualisierungen von Spiralen im Zusammenhang mit *Phyllotaxis*. (Der Winkel α heißt *Divergenzwinkel*, im Fall $\alpha=137,520\dots^\circ$ „goldener Winkel“)

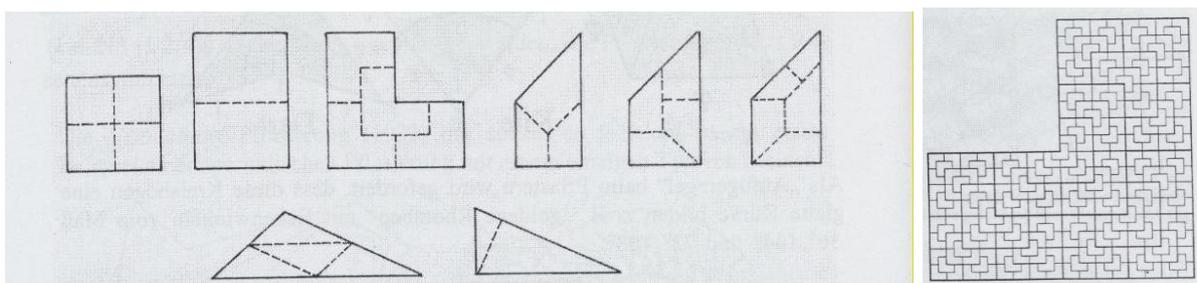


Bild 42: Beispiele von Pflasterungen der Ebene mit „Reptiles“.

Goldener Schnitt, Mittelwerte, Origami

Wir haben in Bild 41 mit dem Goldenen Winkel bereits den „Goldenen Schnitt“ vorweggenommen. Es handelt sich um einen Winkel, der sich zum Rest auf den vollen Winkel (mit dem Maß 2π) so verhält, wie dieser Rest zu 2π . Eine Strecke wird also so geteilt, dass der größere Teil, der *Major* M , sich zum Restteil, dem *Minor* m , die gleiche Proportion bestimmt, wie die Gesamtstrecke zu M , dass also gilt $m:M = M:(M+m)$. Der Zahlenwert dieser Proportion heißt „*Goldener Mittelwert*“ $\phi = 0.618 \dots$. (Beachte, dass dies der Betrag des Teilverhältnisses der drei die M und m definierenden Punkte ist, das für einen inneren Teilungspunkt negativ ist!) Wegen der als Schließungsbedingung aufzufassenden Gleichung $\phi^2 = \phi + 1$ kann jede Potenz ϕ^k , ($k \in \mathbb{Z}$), als Summe $p\phi + q$, ($p, q \in \mathbb{Z}$), dargestellt werden. Fasst man ϕ bzw. $\phi^{-1} = 1.618 \dots$ als Ausgangselemente einer speziellen geometrischen Reihe auf, dann ist M ist also das *geometrische Mittel* aus m und $M+m$. Es ist damit naheliegend, zur Visualisierung der durch ϕ^k bestimmten einparametrischen Gruppe (vgl. Bild 35, rechts) Spiralmuster zu verwenden. Insbesondere sind Spiralspolygone zu Rechtecken mit dem Seitenverhältnis $1:\phi$ oder auf regulären Fünfecken basierende Spiralspolygone üblich, wobei die Seiten der Spiralspolygone noch durch Kreisbogen mit GC^1 -Übergang ersetzt werden, (Bilder 43 und 44).

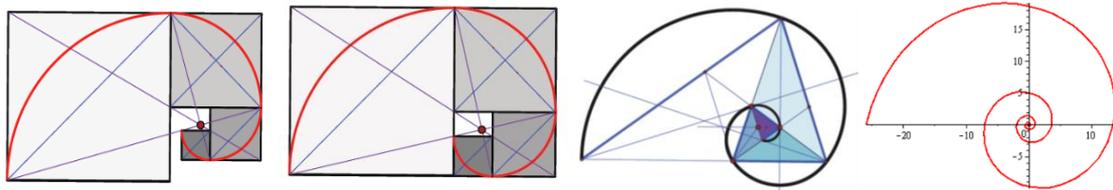


Bild 43: Kreisbogen-Spiralen im Vergleich mit einer logarithmischen Spirale (ganz rechts)

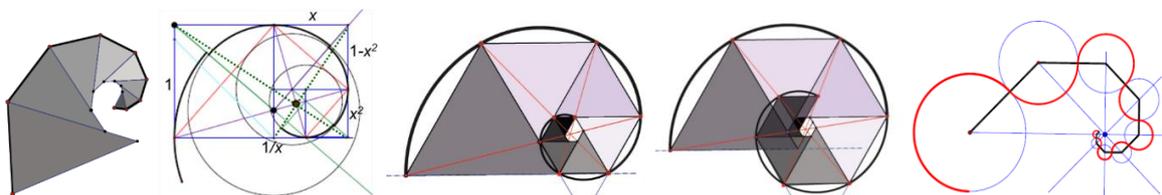


Bild 44: Spiralspolygone mit algebraischen „Schließungsbedingungen“ höherer Ordnung. In der mittleren Figur wird z.B. die „Laan-Bedingung“ $x^3 = x + 1$ visualisiert.

Die den Goldenen Mittelwert und seine Verallgemeinerungen betreffende Literatur ist überaus umfangreich. Hier soll nur noch das von G. Odom entdeckte Auftreten der Goldenen Proportion beim gleichseitigen Dreieck und beim Würfel erwähnt werden, (Bild 45).

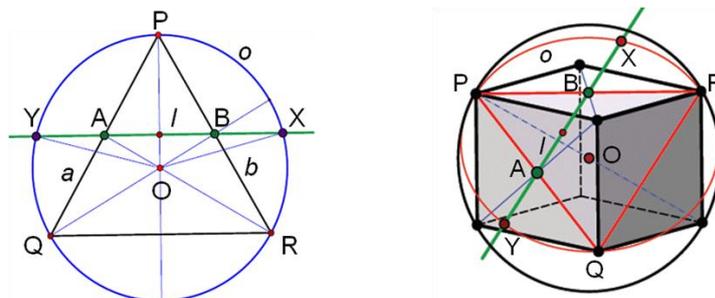


Bild 45: G. Odom's Entdeckung: Beim gleichseitigen Dreieck schneidet die Verbindungsgerade zweier Seitenmitten den Umkreis so, dass gilt: $\phi = [AB]:[AX]$. Hieraus folgt unmittelbar eine analoge Eigenschaft für den Würfel und seine Umkugel.

Abschließend gehen wir noch kurz auf „Geometrisches Origami“ ein. Mit dem Falten begegnen wir erneut der eingangs erwähnten Idee Bachmans, Geometrie aus Spiegelungen aufzubauen. Origami liegt ein „Axiomensystem“ von 7 Axiomen (Bild 46) zugrunde so, dass die Lösung kubischer Aufgaben, wie etwa die Winkeldreiteilung, die Konstruktion des regulären Siebenecks und das Kubikwurzelziehen ermöglicht wird. Zentrales Axiom dieses *Huzita-Justin-Hatori*-Systems ist das 6. Axiom, von dem die anderen zum Teil Sonderfälle sind. Es löst die kubische Aufgabe, an zwei Parabeln eine gemeinsame Tangente zu finden. Das 7. Axiom ist überzählig und wurde nur zur Vereinfachung von Konstruktionsschritten eingeführt. Frage: Was geht davon auf der Kugel?

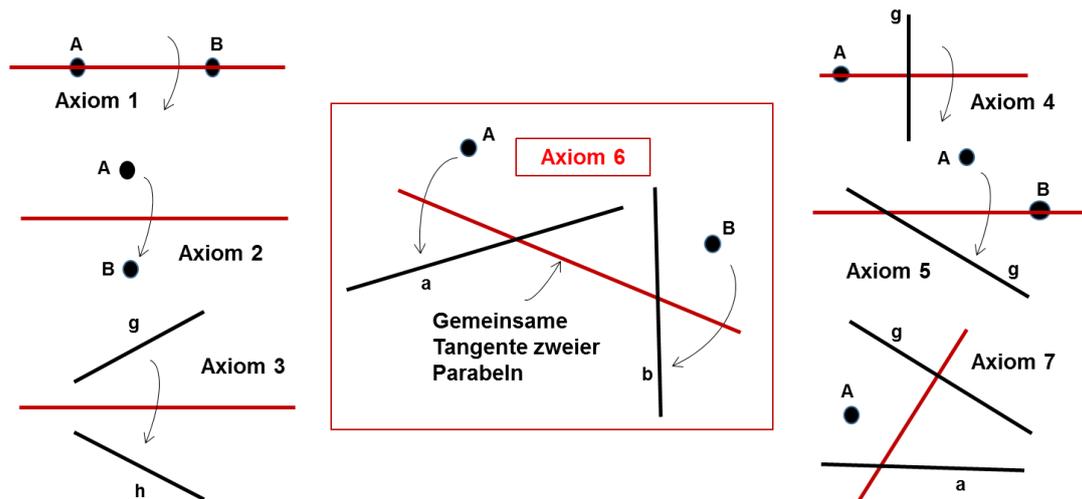


Bild 46: Die sieben Huzita – Justin – Hatori Axiome für 2D-Origami.

Damit können „klassische“ Aufgaben, wie etwa die in Bild 47 dargestellte Konstruktion der Folge $\{\frac{1}{n}\}$, die Strecken-Dritteln ohne Strahlensatz, der „Goldene Schnitt“ und die Faltung eines regulären Fünfecks vorgenommen werden.

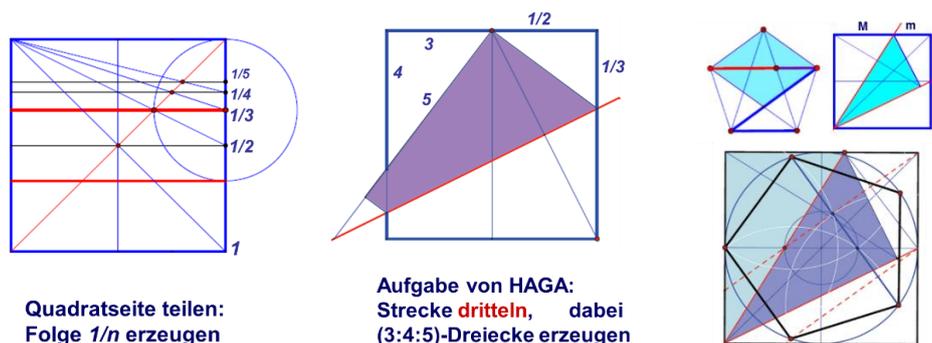


Bild 47: Beispiele von Origami-Konstruktionen.

Schlussbemerkung: Da auch für dieses Sachgebiet bereits gut ausgearbeitete Lehrmaterialien existieren, unterbleibt hier die ausführlichere Behandlung. Diesem Stoffgebiet messe ich große schulische Relevanz zu: Schüler trainieren dabei jene „Softskills“, die sonst beim Geometrischen Zeichnen und der Darstellenden Geometrie gefördert werden bzw. wurden. Außerdem arbeiten die Schüler üblicherweise mit großem Interesse an Origami-Aufgaben. Hier, wie auch bei anderen der erwähnten Stoffgebiete, bieten sich zur Aufgaben-Präsentation auch Redeübungen an.